

# Лист для рецензии

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>1 Общие сведения об оценивании параметров сигналов</b>	<b>6</b>
1.1 Метод максимального правдоподобия . . . . .	6
1.2 Свойства оценок максимального правдоподобия . . . . .	9
1.3 Неравенство Рао-Крамера . . . . .	10
1.4 Оптимальная оценка начальной фазы сигнала . . . . .	12
1.4.1 Постановка задачи . . . . .	12
1.4.2 Получение алгоритма . . . . .	13
1.4.3 Геометрическая интерпретация корреляционных компонент	15
1.4.4 Потенциальная точность оценки начальной фазы . . . . .	21
<b>2 Радиоинтерферометрический метод оценивания угла прихода сигнала</b>	<b>24</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	25
2.2 Алгоритм оценивания угла прихода . . . . .	27
2.3 Потенциальная точность формируемой оценки . . . . .	30
2.4 Причины возникновения неоднозначности . . . . .	32
2.5 Моделирование работы алгоритма . . . . .	35
2.5.1 Моделирование при устранении только основной неоднозначности . . . . .	37
2.5.2 Моделирование при устранении основной неоднозначности и базовой дополнительной неоднозначности . . . . .	42
2.5.3 Моделирование при полном устранении неоднозначности . . . . .	44
2.6 Выводы . . . . .	47
<b>3 Алгоритм оптимального оценивания угла прихода сигнала при известной базовой фазе</b>	<b>48</b>
3.1 Постановка задачи . . . . .	48
3.2 План решения задачи . . . . .	49

3.3	Отношение правдоподобия . . . . .	50
3.4	Дифференцирование логарифма отношения правдоподобия . . . . .	51
3.5	Экстремумы отношения правдоподобия . . . . .	51
3.6	Потенциальная точность формируемой оценки . . . . .	53
3.7	Анализ составляющих оценки . . . . .	57
3.8	Переход к алгоритму, не учитывающему базовую фазу . . . . .	59
3.9	Моделирование работы алгоритма . . . . .	60
3.9.1	Моделирование при исключении только основной неоднозначности . . . . .	61
3.9.2	Моделирование при полном исключении неоднозначности . . . . .	66
3.10	Выводы . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Алгоритм оптимального оценивания угла прихода сигнала при неизвестной базовой фазе</b> . . . . .	<b>70</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	70
4.2	План решения задачи . . . . .	72
4.3	Отношение правдоподобия . . . . .	72
4.4	Исключение неинформативного параметра . . . . .	73
4.5	Дифференцирование логарифма отношения правдоподобия . . . . .	74
4.6	Экстремумы отношения правдоподобия . . . . .	75
4.7	Потенциальная точность формируемой оценки . . . . .	81
4.8	Радиоинтерферометрический метод как геометрическая интерпретация . . . . .	82
4.9	Моделирование работы алгоритма . . . . .	84
4.9.1	Моделирование при исключении только основной неоднозначности . . . . .	84
4.9.2	Моделирование при полном исключении неоднозначности . . . . .	89
4.10	Выводы . . . . .	93
	<b>Заключение</b> . . . . .	<b>94</b>

Список литературы	97
Приложение 1. Листинг программы (MatLAB) исследования характеристик в срезе и усреднении по базовой фазе	98
Приложение 2. Листинг программы (MatLAB) исследования поверхностей смещения и СКО	102
Приложение 3. Задание на выпускную работу	106

## Введение

За последние десять лет произошел большой скачок в развитии индивидуальных радиоэлектронных устройств. Ожидается постепенное вытеснение узкоспециализированными устройствами, объединенными в единую сеть, универсальных устройств. Мобильность индивидуальных устройств тесно связана с радиосистемами: электромагнитные волны радиодиапазона обладают уникальными свойствами, востребованными в подвижных системах. По прогнозам аналитиков (например, [12]), в ближайшем будущем на каждого человека будут приходиться десятки небольших устройств, использующих для связи с внешним миром радиодиапазон. Спрос на радиосистемы оправдывает усилия на их совершенствование.

Одна из возможных задач радиосистемы – углометрия. Примеров применения принципов углометрии множество: пассивная радиолокация, системы предупреждения столкновений кораблей в море, летательных аппаратов в воздухе, системы наведения оружия, управления полётами и посадкой самолётов, обеспечения встречи и стыковки космических станций в космосе, определение направления на связку ключей в комнате ([3], [7], [8], [9], [10], [11]).

В углометрии можно выделить два основных метода: амплитудный и фазовый. Фазовый метод, ввиду лучшей потенциальной точности, представляется более интересным и совершенным.

При использовании фазового метода простейшей, базовой задачей является определение угла прихода сигнала при приеме в двух разнесенных точках. Возможно множество различных решений данной задачи. Классическим решением является радиоинтерферометрический метод [8], но он не является результатом синтеза оптимального, в некотором смысле, алгоритма, а используется традиционно. Получить алгоритмы оценки угловых координат методами оптимального синтеза, изучить работу этих алгоритмов и выявить предпочтения в зависимости от области практического применения – основная цель данной работы.

# 1 Общие сведения об оценивании параметров сигналов

В задачах оценивания угла зачастую отсутствует априорная информация о законе распределения оцениваемого параметра. При этом, одним из основных требований конечного потребителя является требование минимизации среднеквадратической ошибки оценивания параметра. Дать оценку параметра по апостериорным данным, среднеквадратическая ошибка которой при определенных условиях стремится к потенциальной, позволяет метод максимального правдоподобия. Основываясь на [1, с. 158-203], [3], [4], [5], [6], опишем метод и его свойства при радиотехническом приложении.

## 1.1 Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия в его современном виде был предложен английским статистиком Р. Фишером (1912), однако в частных формах метод использовался К. Гауссом, а ещё раньше, в XVIII веке, к его идее были близки И. Ламберт и Д. Бернулли [4, с. 541].

В задачах радиотехники, в большинстве случаев, производится оценка параметров сигнала, принимаемого на фоне аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) на конечном временном интервале ([1], [2]). В случае приема одного сигнала на фоне АБГШ, выборка представлена реализацией ([1]):

$$y(t) = S(t, \lambda, \mu) + n(t), \quad t \in [0; T], \quad (1.1)$$

где  $S(t, \lambda, \mu)$  - сигнал;

$\lambda = |\lambda_1, \dots, \lambda_l|^T$  - *вектор информативных параметров* – параметры несущие полезную информацию, оценки которых необходимо получить;

$\mu = |\mu_1, \dots, \mu_m|^T$  - *вектор неинформативных параметров* – параметры сигнала, которые не представляют интереса для потребителя;

$n(t)$  – белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и двусторонней спектральной плотностью  $N_0/2$ .

Принятую на интервале  $[0; T]$  реализацию будем обозначать как  $Y_0^T \in \mathbb{Y}$ , где  $\mathbb{Y}$  – множество возможных реализаций.

На основании (1.1) составляется *функция правдоподобия*  $L(\lambda)$  – условная плотность вероятности  $p(Y_0^T|\lambda)$ , рассматриваемая как функция вектора-параметра  $\lambda$ . Функцию правдоподобия можно трактовать как меру вероятности получения реализации  $Y_0^T$  при фиксированном значении параметра распределения  $\lambda$ .

Для наблюдения (1.1) при отсутствии неинформативных параметров функция правдоподобия описывается выражением ([1, с. 90-92]):

$$L(\lambda) = k \cdot \exp \left( \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) \left[ y(t) - \frac{1}{2} S(t, \lambda) \right] dt \right), \quad (1.2)$$

где  $k$  – положительная величина не зависящая от  $S(t, \lambda)$ .

*Оценкой максимального правдоподобия* называется такая оценка параметра  $\lambda$ , при которой достигается максимум функции правдоподобия ([1], [3], [5], [4] и др.):

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} L(\lambda). \quad (1.3)$$

В работах по теоретической математике часто используется понятие *супремума* – глобального максимума множества. Тогда метод максимального правдоподобия выражается тождеством ([5, с. 304]):

$$L(\hat{\lambda}) = \sup L(\lambda). \quad (1.4)$$

Так как функция логарифма монотонна, то выражению (1.3) эквивалентно:

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} \ln(L(\lambda)). \quad (1.5)$$

При функции правдоподобия вида (1.2) вводят *отношение правдоподобия* ([1, с. 91, 161]):

$$\rho(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{p(Y_0^T|S(t, \lambda) = 0)} = \exp \left( \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) \left[ y(t) - \frac{1}{2} S(t, \lambda) \right] dt \right). \quad (1.6)$$

$$\ln(\rho(\lambda)) = \frac{2}{N_0} \int_0^T S(t, \lambda) \left[ y(t) - \frac{1}{2} S(t, \lambda) \right] dt. \quad (1.7)$$

Условная плотность вероятности  $p(Y_0^T | S(t, \lambda) = 0)$  не является функцией вектора оцениваемых параметров, поэтому аргументы супремумов отношения правдоподобия и функции правдоподобия совпадают. Для оценки максимального правдоподобия можно записать ([1, с. 161]):

$$\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda} \ln(\rho(\lambda)). \quad (1.8)$$

Максимум логарифма отношения правдоподобия, как правило, ищут из необходимого условия максимума ([1, с. 161], [5, с. 305], [4, с. 542] и др.):

$$\left. \frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0. \quad (1.9)$$

Условие (1.9) называется *уравнением правдоподобия* ([4, с. 542]). Оценка максимального правдоподобия – корень уравнения правдоподобия, соответствующий супремуму функции правдоподобия.

В ряде задач сигнал имеет неинформативные параметры. При известной плотности вероятности распределения неинформативных параметров функцию правдоподобия усредняют по ним ([1, с. 161]):

$$L(\lambda) = \int_{\mu} L(\lambda, \mu) p(\mu) d\mu. \quad (1.10)$$

Если рассматривают отношение правдоподобия, то поступают аналогично:

$$\rho(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{p(Y_0^T | S(t, \lambda) = 0)} = \frac{\int_{\mu} L(\lambda, \mu) p(\mu) d\mu}{p(Y_0^T | S(t, \lambda) = 0)} = \int_{\mu} \rho(\lambda, \mu) p(\mu) d\mu. \quad (1.11)$$

Согласно [1], в случае приема двух сигналов с независимыми АБГШ логарифм отношения правдоподобия принимает вид:

$$\rho(\theta, \lambda) = \exp \left[ \frac{2}{N_0} \left\{ \int_0^T y_1(t) S_1(t, \lambda) dt + \int_0^T y_2(t) S_2(t, \lambda) dt - E \right\} \right], \quad (1.12)$$

где  $E = \frac{1}{2} \int_0^T (S_1(t, \lambda))^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T (S_2(t, \lambda))^2 dt$ ;

$S_1(t, \lambda), S_2(t, \lambda)$  – сигналы.

Приведенное выражение можно получить путем перемножения функций правдоподобия с учетом независимости АБГШ в реализациях.



## 1.2 Свойства оценок максимального правдоподобия

Рассмотрим разность истинного значения параметра и математического ожидания его оценки:

$$\Delta_\lambda = \lambda - M_\lambda[\hat{\lambda}], \quad (1.13)$$

где  $M_\lambda$  - оператор взятия математического ожидания при фиксированном параметре  $\lambda$ .

Величина  $\Delta_\lambda$  называется *смещением оценки* ([1, с. 162]).

Если  $\Delta_\lambda \neq 0$ , то оценка называется *смещенной*; если  $\Delta_\lambda = 0$ , то оценка называется *несмещенной*.

Смещение отражает систематическое расхождение между оценкой и истинным параметром. В общем случае каждому истинному значению оцениваемого параметра соответствует своё значение смещения оценки:  $\Delta_\lambda(\lambda)$ .

Классическим образом вводится понятие дисперсии оценки. В общем случае она зависит от значения оцениваемого параметра:

$$D_\lambda[\hat{\lambda}] = M_\lambda \left[ \hat{\lambda} - M_\lambda[\hat{\lambda}] \right]^2. \quad (1.14)$$

За основной показатель качества оценивания для конечного потребителя, определяющий *точность* производимых оценок, принимаем *средний квадрат ошибки оценки*:

$$D_\lambda^{\text{CKO}} = M_\lambda[\hat{\lambda} - \lambda]^2. \quad (1.15)$$

Соответственно считаем, что точность количественно обратно пропорциональна среднему квадрату ошибки.

При стремлении смещения оценки к нулю, средний квадрат ошибки оценки стремится к дисперсии оценки:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta_\lambda \rightarrow 0} D_\lambda^{\text{CKO}} &= \lim_{\Delta_\lambda \rightarrow 0} M_\lambda[\hat{\lambda} - \lambda]^2 = \lim_{\Delta_\lambda \rightarrow 0} M_\lambda[\hat{\lambda} - M_\lambda[\hat{\lambda}] - \Delta_\lambda]^2 \rightarrow \\ &\rightarrow M_\lambda \left[ \hat{\lambda} - M_\lambda[\hat{\lambda}] \right]^2 = D_\lambda[\hat{\lambda}]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Оценка  $\hat{\lambda}_1 \in K$  параметра  $\lambda$  называется *эффективной оценкой в классе*  $K$ , если для любой другой оценки  $\hat{\lambda}_2 \in K$  выполняется неравенство:

$$M_\lambda[\hat{\lambda}_1 - \lambda]^2 \leq M_\lambda[\hat{\lambda}_2 - \lambda]^2 \quad \forall \lambda. \quad (1.17)$$

Если несмещенная оценка  $\hat{\lambda}_1$  является эффективной оценкой в классе всех оценок и при этом входит в класс несмещенных, то такую оценку принято называть просто *эффективной* ([3], [1]).

Увеличение смещения и увеличение дисперсии оценки приводит к монотонному увеличению среднего квадрата ошибки оценки, поэтому достаточным условием минимума дисперсии ошибки является достижение минимума модуля смещения при минимуме дисперсии оценки. Поэтому, ввиду нужд конечного потребителя, важной задачей является отыскание эффективных оценок – эффективность оценки гарантирует минимизацию среднего квадрата ошибки оценки.

Доказывается ([1], [4], [5]), что если существует эффективная оценка параметра  $\lambda$ , то она является корнем уравнения правдоподобия.

### 1.3 Неравенство Рао-Крамера

В математической статистике *неравенством Рао-Крамера* называется неравенство, которое при некоторых условиях на статистическую модель даёт нижнюю границу для дисперсии оценки неизвестного параметра, выражая её через информацию Фишера ([3], [1, с. 162]). Неравенство названо в честь статистов Геральда Крамера и Кальямпуди Радхакришна Рао.

В радиотехнических задачах заведомо выполняются условия при которых неравенство справедливо ([3]).

Пусть,  $\lambda$  - скалярный оцениваемый параметр. В общем случае неравенство Рао-Крамера есть ([1, с. 164]):

$$D_\lambda[\hat{\lambda}] \geq \frac{\left(1 + \frac{\partial \Delta_\lambda(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2}{\int_{\mathbb{Y}} \left(\frac{\partial \ln(p(Y_0^T|\lambda))}{\partial \lambda}\right)^2 p(Y_0^T|\lambda) dY_0^T}, \quad (1.18)$$

где  $D_\lambda[\hat{\lambda}] = M_\lambda[\hat{\lambda} - M_\lambda[\hat{\lambda}]]^2$  – дисперсия оценки при фиксированном  $\lambda$ .

Справедлива цепочка тождеств ([1, с. 165-166]):

$$\begin{aligned} M_\lambda \left[ \frac{\partial \ln(p(Y_0^T|\lambda))}{\partial \lambda} \right]^2 &= \int_{\mathbb{Y}} \left( \frac{\partial \ln(p(Y_0^T|\lambda))}{\partial \lambda} \right)^2 p(Y_0^T|\lambda) dY_0^T = \\ &= - \int_{\mathbb{Y}} \frac{\partial^2 \ln(p(Y_0^T|\lambda))}{\partial \lambda^2} p(Y_0^T|\lambda) dY_0^T = -M_\lambda \left[ \frac{\partial^2 \ln(p(Y_0^T|\lambda))}{\partial \lambda^2} \right] \equiv I(\lambda), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $I(\lambda)$  – информация Фишера.

С учетом (1.19) можем записать неравенство Рао-Крамера в эквивалентном (1.18) виде:

$$D_\lambda[\hat{\lambda}] \geq \frac{\left(1 + \frac{\partial \Delta_\lambda(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2}{I(\lambda)}. \quad (1.20)$$

Если смещение отсутствует или не зависит от  $\lambda$ , то применяется упрощенная версия неравенства ([3], [1, с. 166]):

$$D_\lambda[\hat{\lambda}] \geq \frac{1}{I(\lambda)}, \quad (1.21)$$

Величина, стоящая в правой части неравенства 1.21, определяет минимальную возможную дисперсию оценки, поэтому её называют *потенциальной дисперсией*. Потенциальная дисперсия совпадает с минимальным возможным средним квадратом ошибки, а значит определяет *потенциальную точность*.

Информация Фишера, а значит и потенциальная дисперсия, в общем случае является функцией истинного значения оцениваемого параметра и неслучайных параметров условной плотности вероятности и не является функцией неинформативных параметров.

В силу свойств логарифма, значение производной любого порядка логарифма функции правдоподобия (1.2) по оцениваемому параметру совпадает с соответствующей производной для логарифма отношения правдоподобия (1.6), то есть в случае второго порядка производной:

$$\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2}. \quad (1.22)$$

При расчете информации Фишера функцию правдоподобия вида (1.2) можно заменить на отношение правдоподобия.

Неравенство Рао-Крамера задает минимальную дисперсию оценок параметра при заданной функции правдоподобия. По определению несмещенная оценка параметра, дисперсия которой совпадает с потенциальной, является эффективной оценкой ([1, с. 164]).

В радиотехнических задачах можно говорить о стремлении оценок максимального правдоподобия к эффективным при увеличении отношения  $s/\sigma$  в принимаемых реализациях ([1], [5]), а значит достижение при определенных условиях потенциальной точности.

## 1.4 Оптимальная оценка начальной фазы сигнала

Рассмотрим синтез алгоритма оптимальной, в смысле максимума функции правдоподобия, оценки фазы гармонического колебания, проведем геометрическую интерпретацию и изучим дисперсию ошибки оценки. В ходе решения будем опираться на подобные выкладки в [1] и [2].

### 1.4.1 Постановка задачи

Гармоническое колебание

$$S(t) = A \cos(\omega t + \varphi_n), \quad t \in [0; T] \quad (1.23)$$

с известными амплитудой и частотой, но неизвестной начальной фазой  $\varphi_n$  (фазой колебания в точке приема в начальный момент времени), принимается на фоне аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ)  $n(t)$  на временном интервале  $T$ :

$$y(t) = S(t, \varphi_n) + n(t), \quad t \in [0; T]. \quad (1.24)$$

АБГШ имеет известную двустороннюю спектральную плотность мощности  $N_0/2$ , то есть:

$$M[n(t)n(t + \tau)] = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (1.25)$$

Закон распределения начальной фазы  $\varphi_n$  неизвестен. Она является случайным параметром, неизменным на всем интервале наблюдения.

Период наблюдения  $T$  либо кратен периоду колебания, либо многократно превышает его.

Требуется получить оптимальную, в смысле максимума функции правдоподобия, оценку начальной фазы  $\varphi_H$ .

### 1.4.2 Получение алгоритма

Найдем оценку максимального правдоподобия, для чего запишем логарифм отношения правдоподобия (1.1, с. 6):

$$\ln \rho(\varphi_H) = \frac{2}{N_0} \left\{ \int_0^T y(t) S(t, \varphi_H) dt - 0.5 \int_0^T S^2(t, \varphi_H) dt \right\}. \quad (1.26)$$

Продифференцируем логарифм отношения правдоподобия по оцениваемому параметру:

$$\frac{\partial \ln \rho(\varphi_H)}{\partial \varphi_H} = \frac{2}{N_0} \left\{ \int_0^T \frac{\partial y(t) S(t, \varphi_H)}{\partial \varphi_H} dt - \frac{\partial 0.5 \int_0^T S^2(t, \varphi_H) dt}{\partial \varphi_H} \right\}. \quad (1.27)$$

Функция под производной во втором слагаемом, по определению, является половиной энергии сигнала. Если период  $T$  кратен периоду высокой частоты, то энергия сигнала не зависит от выпавшего значения  $\varphi_H$ . Если же период накопления не совпадает с периодом высокой частоты, но многократно превышает его, что характерно для радиосистем, то с большой точностью можно считать энергию сигнала независимой от начальной фазы  $\varphi_H$ . Отсюда следует, что для рассматриваемой задачи второе слагаемое обращается в ноль, тогда (1.27) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \ln \rho(\varphi_H)}{\partial \varphi_H} = \frac{2}{N_0} \int_0^T \frac{\partial y(t) S(t, \varphi_H)}{\partial \varphi_H} dt = \frac{2}{N_0} \int_0^T \frac{\partial y(t) A \cos(\omega t + \varphi_H)}{\partial \varphi_H} dt. \quad (1.28)$$

В поиске глобального максимума логарифма правдоподобия приравняем выражение (1.28) нулю и выражаем из образующегося уравнения  $\varphi_H$ :

$$\frac{2}{N_0} \int_0^T \frac{\partial y(t) A \cos(\omega t + \varphi_H)}{\partial \varphi_H} dt = 0 \left| \hat{\varphi}_H \Rightarrow \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow \int_0^T y(t) \frac{\partial \cos(\omega t + \varphi_H)}{\partial \varphi_H} dt = 0 \Rightarrow \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow \int_0^T y(t) \sin(\omega t + \varphi_H) dt = 0 \Rightarrow \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow \int_0^T y(t) [\sin(\omega t) \cos(\varphi_H) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_H)] dt = 0 \Rightarrow \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi_H) \int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt = -\cos(\varphi_H) \int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt \Rightarrow \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\hat{\varphi}_H) = -\frac{\int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt}{\int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt} \Rightarrow \quad (1.34)$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}_H = -\operatorname{arctg} \frac{\int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt}{\int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \quad (1.35)$$

$$\Rightarrow \hat{\varphi}_H = -\operatorname{arctg} \left( \frac{Q}{I} \right) + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \quad (1.36)$$

где  $I, Q$  - корреляционные интегралы:

$Q = \int_0^T y(t) \sin(\omega t) dt$  - квадратурная компонента,

$I = \int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt$  - синфазная компонента.

Аналогичный результат получен в [1, с. 179].

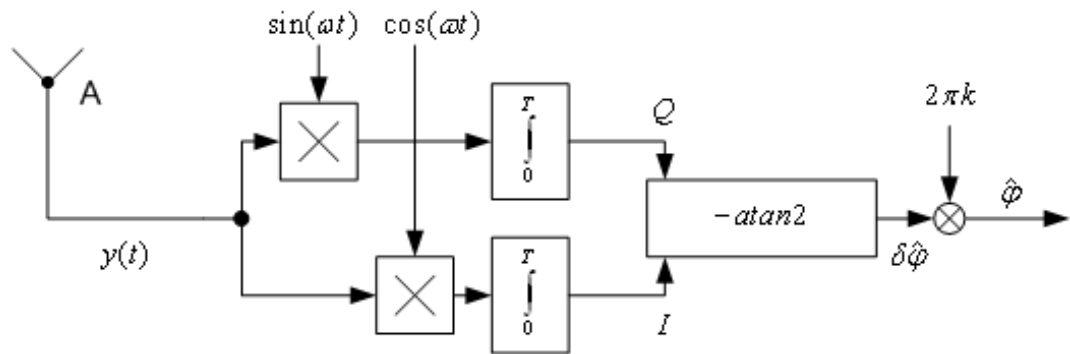
Если воспользоваться функцией

$$\operatorname{atan2}(Q, I) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(Q/I) \forall I \geq 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}(Q/I) \forall I \leq 0, Q \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}(Q/I) \forall I \leq 0, Q \leq 0, \end{cases} \quad (1.37)$$

учитывающей полярность разности фаз, то неопределенность уменьшится до шага в  $2\pi$ , что является пределом в отсутствии дополнительных измерений.

Алгоритм принимает вид:

$$\hat{\varphi}_H = -\operatorname{atan2}(Q, I) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.38)$$



**Рис. 1.1.** Функциональная схема блока оптимального оценивания начальной фазы

Функциональная схема устройства, работающего по полученному алгоритму, приведена на рис. 1.1

Аналогичные результаты получены в [1, с. 179-180].

Большие трудности вызывает неоднозначность фазовых измерений. По факту происходит измерение не  $\varphi_n$  приходящего сигнала, а её величины, приведенной вычитанием целого числа  $\pi$  к интервалу  $[-\pi/2; \pi/2]$  для алгоритма (1.36) и вычитанием целого числа  $2\pi$  к интервалу  $[-\pi; \pi]$  для алгоритма (1.38). Требуется наличие некоторого внешнего устройства, которое бы определяло  $m$  для алгоритма (1.36) и  $k$  для алгоритма (1.38).

### 1.4.3 Геометрическая интерпретация корреляционных компонент

Квадратурная и синфазная корреляционные компоненты (см. (1.36)) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Покажем, что в условиях задачи комплексное число  $\bar{I} + j\bar{Q}$  можно трактовать как подобие комплексной огибающей приходящего сигнала:

$$\bar{I} + j\bar{Q} = A_k e^{-\varphi_k}, \quad (1.39)$$

где

$\bar{I}, \bar{Q}$  - математические ожидания корреляционных компонент, называемые регулярными составляющими ([2]);

$\varphi_k$  - разность начальных фаз колебания в корреляционных интегралах и начальной фазы сигнала, что в данной задаче есть  $\varphi_n$ .

Пусть, принимается сигнал с АБГШ (1.24), и формируются интегралы:

$$Q = \int_0^T y(t) \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt - \text{квадратурная компонента}, \quad (1.40)$$

$$I = \int_0^T y(t) \cos(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt - \text{синфазная компонента}, \quad (1.41)$$

где

$\sin(\omega t + \varphi_{0,ок})$ ,  $\cos(\omega t + \varphi_{0,ок})$  назовем *опорными колебаниями*,

$\varphi_{0,ок}$  – начальная фаза опорных колебаний.

Найдем флуктуационные и регулярные составляющие квадратурной компоненты:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^T y(t) \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt = \\ &= A \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_H) \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt + \int_0^T n(t) \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Рассмотрим составляющие отдельно, введем обозначения:

$$Q_n = \int_0^T n(t) \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt; \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} Q_s &= A \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_H) \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt = \\ &= \frac{A}{2} \int_0^T [\sin(2\omega t + \varphi_{0,ок} + \varphi_H) + \sin(\varphi_{0,ок} - \varphi_H)] dt = Q_s^L + Q_s^M. \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$Q_s^M = \frac{AT}{2} \sin(\varphi_{0,ок} - \varphi_H). \quad (1.45)$$



$$\begin{aligned}
Q_s^L &= \frac{A}{2} \int_0^T \sin(2\omega t + \varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}}) dt = \frac{A}{2} \int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}} + (\varphi_{0,\text{OK}} - \varphi_{\text{H}})) dt = \\
&= \frac{A}{2} \cos(\varphi_{0,\text{OK}} - \varphi_{\text{H}}) \int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}}) dt + \frac{A}{2} \sin(\varphi_{0,\text{OK}} - \varphi_{\text{H}}) \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}}) dt.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}}) dt &= \int_0^T \frac{\cos(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}}) d(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} = \\
&= \frac{\sin(2\omega T + 2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} - \frac{\sin(2\varphi_{\text{H}})}{2\omega}; \tag{1.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}}) dt &= \int_0^T \frac{\sin(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}}) d(2\omega t + 2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} = \\
&= -\frac{\cos(2\omega T + 2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} + \frac{\cos(2\varphi_{\text{H}})}{2\omega}. \tag{1.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Q_s^L &= \frac{A}{2} \cos(\varphi_{0,\text{OK}} - \varphi_{\text{H}}) \frac{\cos(2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} - \frac{A}{2} \cos(\varphi_{0,\text{OK}} - \varphi_{\text{H}}) \frac{\cos(2\omega T + 2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} + \\
&+ \frac{A}{2} \sin(\varphi_{0,\text{OK}} - \varphi_{\text{H}}) \frac{\sin(2\omega T + 2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} - \frac{A}{2} \sin(\varphi_{0,\text{OK}} - \varphi_{\text{H}}) \frac{\sin(2\varphi_{\text{H}})}{2\omega} = \\
&= \frac{A}{8\omega} [\cos(\varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}}) + \cos(\varphi_{0,\text{OK}} - 3\varphi_{\text{H}}) - \\
&- \cos(2\omega T + \varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}}) - \cos(\varphi_{0,\text{OK}} - 2\omega T - 3\varphi_{\text{H}}) + \\
&+ \cos(\varphi_{0,\text{OK}} - 2\omega T - 3\varphi_{\text{H}}) - \cos(2\omega T + \varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}}) - \\
&- \cos(\varphi_{0,\text{OK}} - 3\varphi_{\text{H}}) + \cos(\varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}})] = \\
&= \frac{A}{4\omega} [\cos(\varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}}) - \cos(2\omega T + \varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}})] = \\
&= \frac{AT}{2} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \sin(\omega T + \varphi_{0,\text{OK}} + \varphi_{\text{H}}). \tag{1.49}
\end{aligned}$$

Объединяя результаты получаем выражения для квадратурной компоненты:

$$Q = Q_s^M + Q_s^L + Q_n = \frac{AT}{2} \sin(\varphi_{0,ок} - \varphi_H) + \frac{AT}{2} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \sin(\omega T + \varphi_{0,ок} + \varphi_H) + \int_0^T n(t) \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt. \quad (1.50)$$

Повторим расчет для флуктуационной и регулярной составляющих синфазной компоненты:

$$I = \int_0^T y(t) \cos(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt = A \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_H) \cos(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt + \int_0^T n(t) \cos(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt. \quad (1.51)$$

Введем обозначения:

$$I_n = \int_0^T n(t) \cos(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt; \quad (1.52)$$

$$I_s = A \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_H) \cos(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt = \frac{A}{2} \int_0^T [\cos(2\omega t + \varphi_{0,ок} + \varphi_H) + \cos(\varphi_{0,ок} - \varphi_H)] dt = I_s^L + I_s^M. \quad (1.53)$$

$$I_s^L = \frac{A}{2} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_{0,ок} + \varphi_H) dt = \frac{A}{2} \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi_H + (\varphi_{0,ок} - \varphi_H)) dt = \frac{A}{2} \cos(\varphi_{0,ок} - \varphi_H) \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi_H) dt - \frac{A}{2} \sin(\varphi_{0,ок} - \varphi_H) \int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_H) dt. \quad (1.54)$$

$$I_s^M = \frac{AT}{2} \cos(\varphi_{0,ок} - \varphi_H). \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_s^L &= -\frac{A}{2}\cos(\varphi_{0,\text{ок}} - \varphi_{\text{н}})\frac{\sin(2\varphi_{\text{н}})}{2\omega} + \frac{A}{2}\cos(\varphi_{0,\text{ок}} - \varphi_{\text{н}})\frac{\sin(2\omega T + 2\varphi_{\text{н}})}{2\omega} + \\
&+ \frac{A}{2}\sin(\varphi_{0,\text{ок}} - \varphi_{\text{н}})\frac{\cos(2\omega T + 2\varphi_{\text{н}})}{2\omega} - \frac{A}{2}\sin(\varphi_{0,\text{ок}} - \varphi_{\text{н}})\frac{\cos(2\varphi_{\text{н}})}{2\omega} = \\
&= \frac{A}{8\omega}[-\sin(\varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}}) + \sin(\varphi_{0,\text{ок}} - 3\varphi_{\text{н}}) + \\
&+ \sin(2\omega T + \varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}}) - \sin(\varphi_{0,\text{ок}} - 2\omega T - 3\varphi_{\text{н}}) + \\
&+ \sin(\varphi_{0,\text{ок}} - 2\omega T - 3\varphi_{\text{н}}) + \sin(2\omega T + \varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}}) - \\
&- \sin(\varphi_{0,\text{ок}} - 3\varphi_{\text{н}}) - \sin(\varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}})] = \\
&= \frac{A}{4\omega}[\sin(2\omega T + \varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}}) - \sin(\varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}})] = \\
&= \frac{AT}{2} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \cos(\omega T + \varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}}). \quad (1.56)
\end{aligned}$$

Таким образом, для синфазной компоненты получено выражение:

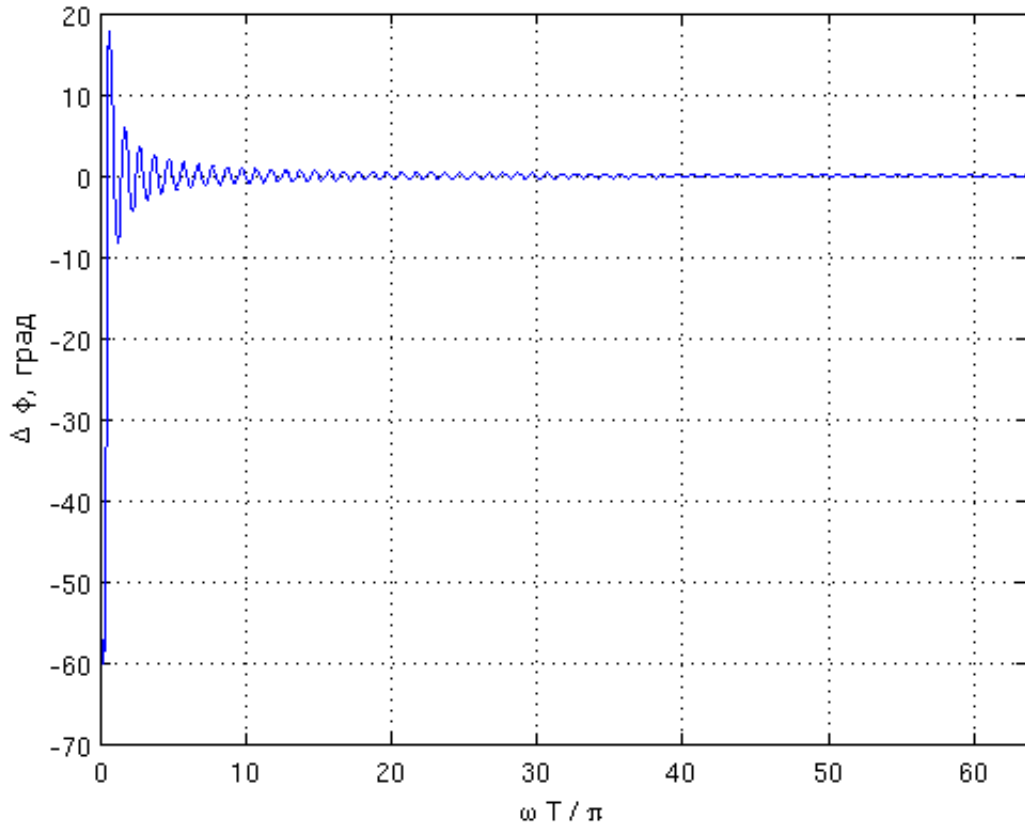
$$\begin{aligned}
I &= I_s^M + I_s^L + I_n = \frac{AT}{2}\cos(\varphi_{0,\text{ок}} - \varphi_{\text{н}}) + \\
&+ \frac{AT}{2} \frac{\sin(\omega T)}{\omega T} \sin(\omega T + \varphi_{0,\text{ок}} + \varphi_{\text{н}}) + \int_0^T n(t)\cos(\omega t + \varphi_{0,\text{ок}}) dt. \quad (1.57)
\end{aligned}$$

И в синфазной, и в квадратурной компоненте присутствуют по три слагаемых. Рассмотрим слагаемые  $I_s^L$ ,  $Q_s^L$ . Каждое из них имеет множитель  $\frac{\sin\omega T}{\omega T}$ , а значит при положительных целых  $\frac{\omega T}{\pi}$  обращается в ноль. При нецелых  $\frac{\omega T}{\pi} \gg 1$  множитель  $\frac{\sin\omega T}{\omega T} \ll 1$ , компонентами  $I_s^L$ ,  $Q_s^L$  можно пренебречь. Таким образом, если период  $T$  кратен периоду частоты сигнала либо многократно превышает его, для синфазной и квадратурной компонент можно записать:

$$I = I_s^M + I_n = \frac{AT}{2}\cos(\varphi_{0,\text{ок}} - \varphi_{\text{н}}) + \int_0^T n(t)\cos(\omega t + \varphi_{0,\text{ок}}) dt. \quad (1.58)$$

$$Q = Q_s^M + Q_n = \frac{AT}{2}\sin(\varphi_{0,\text{ок}} - \varphi_{\text{н}}) + \int_0^T n(t)\sin(\omega t + \varphi_{0,\text{ок}}) dt. \quad (1.59)$$

На компьютерной модели получена ошибка, вносимая  $I_s^L$  и  $Q_s^L$  при отсутствии шума. Результат показан на рис. 1.2. Как и ожидалось, с увеличением  $\omega T$



**Рис. 1.2.** Ошибка, вносимая в оценку  $\varphi_n$  компонентами  $I_s^L$ ,  $Q_s^L$ . Результат моделирования при  $\varphi_n = \pi/4$ ,  $N_0 = 0$ .

влияние компонент  $I_s^L$  и  $Q_s^L$  уменьшается. При  $\omega T$  больше десятка  $\pi$  вносимая ошибка оценки фазы меньше градуса.

Математические ожидания компонент:

$$\begin{aligned} \bar{I} = M [I_s^M + I_n] &= \frac{AT}{2} \cos(\varphi_{0,ок} - \varphi_n) + \int_0^T M[n(t)] \cos(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt = \\ &= \frac{AT}{2} \cos(\varphi_{0,ок} - \varphi_n); \quad (1.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} = M [Q_s^M + Q_n] &= \frac{AT}{2} \sin(\varphi_{0,ок} - \varphi_n) + \int_0^T M[n(t)] \sin(\omega t + \varphi_{0,ок}) dt = \\ &= \frac{AT}{2} \sin(\varphi_{0,ок} - \varphi_n). \quad (1.61) \end{aligned}$$

Обозначим  $A_k = \frac{AT}{2}$ ,  $\varphi_k = -(\varphi_{0,ок} - \varphi_n)$ , тогда комплексное число

$$\bar{I} + j\bar{Q} = A_k e^{-\varphi_k}, \quad (1.62)$$

что и требовалось показать.

Аналогичный результат для регулярных компонент приведен в [2, с. 110].

#### 1.4.4 Потенциальная точность оценки начальной фазы

Воспользуемся неравенством Рао-Крамера (пар. 1.3, с. 10) для определения потенциальной дисперсии оценки начальной фазы  $\varphi_{\text{H}}$ .

Для нахождения информации Фишера при данной постановке задачи необходимо знать вторую производную логарифма отношения правдоподобия по оцениваемому параметру. Находим её повторно дифференцируя (1.28):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln(\rho(\varphi_{\text{H}}))}{\partial \varphi_{\text{H}}^2} &= -\frac{2A}{N_0} \int_0^T y(t) \cos(\omega t + \varphi_{\text{H}}) dt = \\ &= -\frac{2A^2}{N_0} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_{\text{H}}) dt - \frac{2A}{N_0} \int_0^T n(t) \cos(\omega t + \varphi_{\text{H}}) dt = \\ &= -\frac{A^2 T}{N_0} - \frac{2A}{N_0} \int_0^T n(t) \cos(\omega t + \varphi_{\text{H}}) dt. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Случайной величиной является только второе слагаемое. Так как  $M[n(t)] = 0$ , то и математическое ожидание интеграла равно нулю. Тогда информация по Фишеру:

$$I(\varphi_{\text{H}}) = -M_{\varphi_{\text{H}}} \left[ \frac{\partial \ln(\rho(\varphi_{\text{H}}))}{\partial \varphi_{\text{H}}} \right] = \frac{A^2 T}{N_0}. \quad (1.64)$$

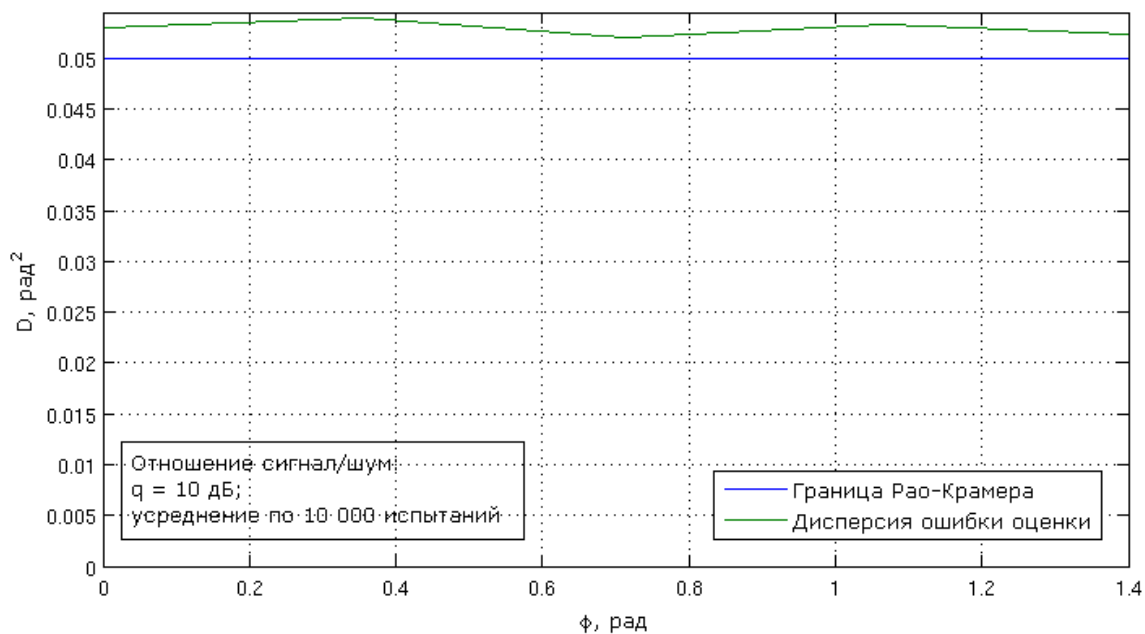
Воспользовавшись неравенством Рао-Крамера записываем:

$$D[\hat{\varphi}_{\text{H}}] \geq \frac{1}{I(\varphi_{\text{H}})} \Rightarrow D[\hat{\varphi}_{\text{H}}] \geq \frac{1}{\frac{A^2 T}{N_0}} \Rightarrow D[\hat{\varphi}_{\text{H}}] \geq \frac{1}{2q}, \quad (1.65)$$

где  $q = \frac{E}{N_0} = \frac{A^2 T}{2N_0}$  - отношение сигнал/шум.

Аналогичный результат можно наблюдать в [1, с. 186]

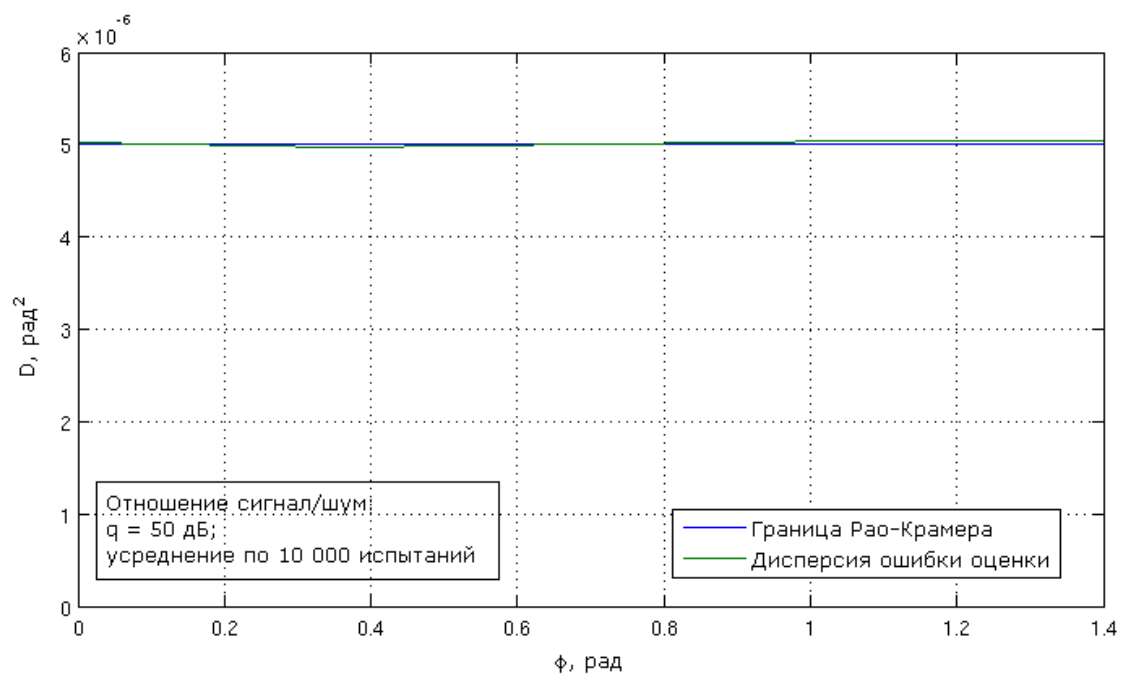
Потенциальная точность оптимальной, в смысле максимума функции правдоподобия, оценки фазы принимаемого сигнала (разности фаз принимаемого сигнала и опорного колебания) зависит только от отношения с/ш в принятой реализации.



**Рис. 1.3.** Дисперсия ошибки оценки фазы при малом отношении сигнал/шум. Результат компьютерного моделирования.

Согласно свойствам оценок максимального правдоподобия (пар. 1.2) дисперсия оценки максимального правдоподобия стремится к потенциальной при увеличении отношения сигнал/шум в принятой реализации. Проще всего проверить данное утверждение на компьютерной модели. Результаты моделирования, подтверждающих данное утверждение, представлены на рис. 1.3, рис. 1.4.

На компьютерной модели была проверена несмещенность оценки максимального правдоподобия начальной фазы принимаемого сигнала - оценка математического ожидания стремится к истинному значению параметра при увеличении числа испытаний.



**Рис. 1.4.** Дисперсия ошибки оценки фазы при большом отношении сигнал/шум. Результат компьютерного моделирования.

## 2 Радиоинтерферометрический метод оценивания угла прихода сигнала

Радиоинтерферометрический метод оценивания угла прихода сигнала удаленного источника в настоящий момент занимает доминирующее положение среди методов углометрии. Он является основной подавляющего большинства реализаций угломерных радиосистем радиоастрономии, пассивной радиолокации, управления транспортом, геодезии, позиционирования в сотовой и спутниковой связи ([7, с. 132], [8, с. 223], [9], [10, с. 380], [11]).

Радиоинтерферометрический метод подразумевает:

- получение разнесенными приемниками реализаций сигнала, излучаемого значительно удаленным источником;
- взаимно независимое измерение фаз принятых сигналов;
- вычисление разности фаз;
- устранение неоднозначности;
- оценку значения угла прихода по сформированной величине.

Указанная последовательность действий при измерении угла не следует из теории оптимального оценивания параметров сигналов, она получена из геометрических соображений и используется традиционно.

Метод не ограничивает способ измерения фаз в приемных точках. На практике часто используется метод оптимального оценивания начальной фазы (пар. 1.4, с. 12).

Сформулируем постановку задачи радиоинтерферометрического оценивания угла, получим алгоритм и оценим его характеристики.



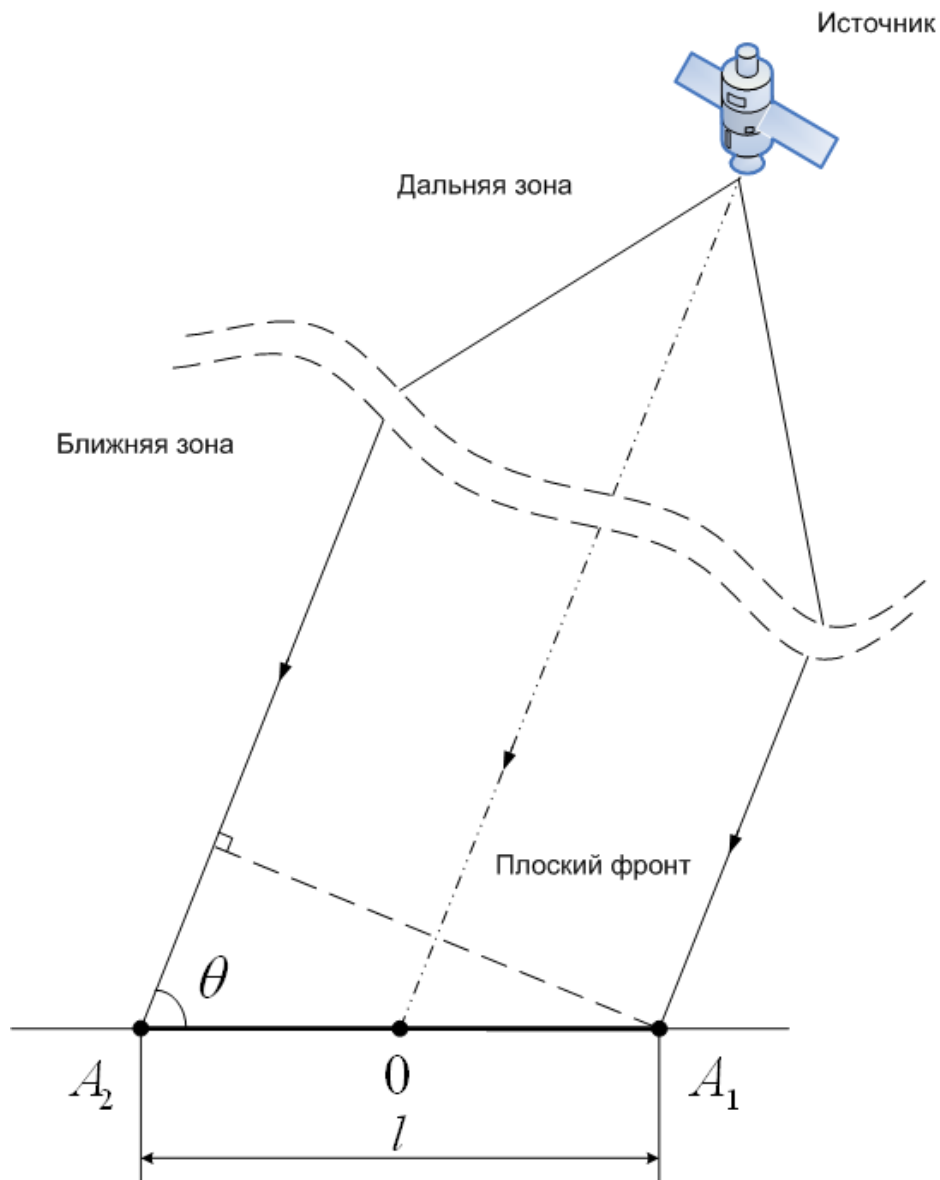


Рис. 2.1. Схема эксперимента

## 2.1 Постановка задачи

В двух точках базовой линии (тт.  $A_1$  и  $A_2$ , рис. 2.1), разнесенных на расстояние  $l$ , производится прием сигнала от одного источника. Расстояние до источника достаточно велико, проходящую волну можно считать плоской, падающей под углом  $\theta$  к базовой линии  $A_1, A_2$ . *Базовой точкой* назовем точку  $O$ , являющуюся центром отрезка  $A_1, A_2$ . Точка  $O$  лежит на базовой линии и равноудалена от точек приема  $A_1$  и  $A_2$ .

Под начальными фазами понимаем фазы в соответствующих точках в начальный момент интервала наблюдения. Начальную фазу в базовой точке

назовем *базовой фазой*.

Априорными данным являются:

- Структура сигнала – гармоническое колебание с известными частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ .
- Длина волны (известна) –  $\lambda$ .
- В базовой точке сигнал описывается выражением:

$$S_0(t, A, \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \in [0; T], \quad (2.1)$$

где  $\varphi_0$  – базовая фаза, является случайной величиной, неизменной на интервале наблюдения.

- Расстояние  $l$ , а как следствие – структура сигналов в точках  $A_1$  и  $A_2$ :

$$S_1(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) = A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}\right), \quad t \in [0; T]; \quad (2.2)$$

$$S_2(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) = A \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}\right), \quad t \in [0; T]. \quad (2.3)$$

В дальнейшем для наглядности выражений опустим обозначения известных параметров:  $S_1(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) \rightarrow S_1(t, \varphi_0, \theta)$ ,  $S_2(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) \rightarrow S_2(t, \varphi_0, \theta)$ .

- Сигналы принимаются на фоне независимых АБГШ  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  с двусторонними спектральными плотностями  $N_0/2$ .
- Прием производится на временном интервале  $[0; T]$ .
- Период наблюдения  $T$  либо кратен периоду колебания, либо многократно превышает его.

Угол прихода сигнала оценивается по измерениям начальных фаз в точках приема  $A_1$  и  $A_2$ , способ этих измерений – оценка максимального правдоподобия начальной фазы (пар. 1.4, с. 12).

Апостериорными данными являются принятые на фоне АБГШ реализации сигналов (2.2), (2.3):

$$y_1(t) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) + n_1(t) = S_1(t, \varphi_0, \theta) + n_1(t), \quad t \in [0; T]; \quad (2.4)$$

$$y_2(t) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) + n_2(t) = S_2(t, \varphi_0, \theta) + n_2(t), \quad t \in [0; T]. \quad (2.5)$$

Происходит разрешение фазовой неоднозначности некоторым сторонним методом.

По измеренным фазам формируется их разность.

Найдем оценку максимального правдоподобия по разности измерений, а также потенциальную дисперсию формируемой оценки.

## 2.2 Алгоритм оценивания угла прихода

С учетом устранения фазовой неоднозначности представим формирующиеся оценки начальных фаз колебаний в точках  $A_1$  и  $A_2$  в виде:

$$\begin{cases} y_{\hat{\varphi}_1} = \varphi_1 + n_{\varphi_1} = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} + n_{\varphi_1}; \\ y_{\hat{\varphi}_2} = \varphi_2 + n_{\varphi_2} = -\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} + n_{\varphi_1}, \end{cases} \quad (2.6)$$

где

$\varphi_1, \varphi_2$  - истинные значения начальных фаз колебаний в точках приема,  
 $n_{\varphi_1}, n_{\varphi_2}$  - шумовые случайные ошибки измерения начальных фаз в соответствующих точках.

По измеренным значениям формируется разность:

$$\Delta y_{\hat{\varphi}} = y_{\hat{\varphi}_1} - y_{\hat{\varphi}_2} = \varphi_1 + n_{\varphi_1} - \varphi_2 - n_{\varphi_2} = y_{\Delta\varphi} + n_{\Delta\varphi}, \quad (2.7)$$

где

$\Delta\varphi$  - истинная разность фаз,

$n_{\Delta\varphi}$  - шумовая случайная ошибка измерения разности фаз.

Для дальнейших расчетов примем допущение, что случайная составляющая  $n_{\Delta\varphi}$  распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией  $D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]$ :

$$p(n_{\Delta\varphi}) = N(0, D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]). \quad (2.8)$$

Близость закона распределения к указанному тем точнее, чем больше отношение  $s/\lambda$  в принятой реализации.

Из геометрических соображений следует связь между истинной разностью фаз в приемных точках и углом прихода сигнала:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda}. \quad (2.9)$$

Тогда разность оценок фаз можно записать в виде:

$$y_{\Delta\hat{\varphi}} = \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} + n_{\Delta\varphi}. \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) задаёт связь между оцениваемым параметром, случайной шумовой составляющей и проведенными измерениями, а (2.8) описывает вероятностные характеристики. Этого достаточно для формирования отношения правдоподобия и получения оценки максимального правдоподобия.

Логарифм отношения правдоподобия:

$$\ln(\rho(\theta)) = \frac{1}{D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \left( y_{\Delta\hat{\varphi}} - 0.5 \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right). \quad (2.11)$$

Первая производная логарифма отношения правдоподобия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta} &= \\ &= -\frac{1}{D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \left( y_{\Delta\hat{\varphi}} - 0.5 \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) + \\ &\quad + 0.5 \frac{1}{D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \frac{2\pi l \sin(\theta)}{\lambda} = \\ &= -\frac{1}{D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \left[ y_{\Delta\hat{\varphi}} - \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right]. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Для нахождения экстремумов логарифма правдоподобия приравняем его первую производную нулю:

$$-\frac{1}{D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l \sin(\hat{\theta})}{\lambda} \left[ y_{\Delta\hat{\varphi}} - \frac{2\pi l \cos(\hat{\theta})}{\lambda} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\hat{\theta}) \left[ y_{\Delta\hat{\varphi}} - \frac{2\pi l \cos(\hat{\theta})}{\lambda} \right] = 0 \quad (2.13)$$

Условие  $\sin(\hat{\theta}) = 0$  не может описывать алгоритм оценки в общем случае, а значит не связано с глобальным максимумом функции правдоподобия. Остается второй множитель:

$$y_{\Delta\hat{\varphi}} - \frac{2\pi l \cos(\hat{\theta})}{\lambda} = 0 \quad (2.14)$$

Выражаем из уравнения оценку угла прихода сигнала:

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} y_{\Delta\hat{\varphi}} \right), \quad (2.15)$$

что при использовании оценок максимального правдоподобия начальных фаз вида (1.38) есть:

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} \left\{ \operatorname{atan2} \left( \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt, \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{atan2} \left( \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt, \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt \right) + 2\pi\xi \right\} \right), \xi \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

При использовании простого арктангенса, то есть при формировании оценок фаз (1.36), алгоритм требует вдвое меньшего дискрета устранения фазовой неоднозначности:

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt}{\int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{\int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt}{\int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt} + \pi\xi \right\} \right), \xi \in \mathbb{Z}. \quad (2.17)$$

Структурная схема устройства, реализующего полученный алгоритм при использовании функции  $\operatorname{atan2}$ , приведена на рис. 2.2, функциональная схема приведена на рис. 2.3

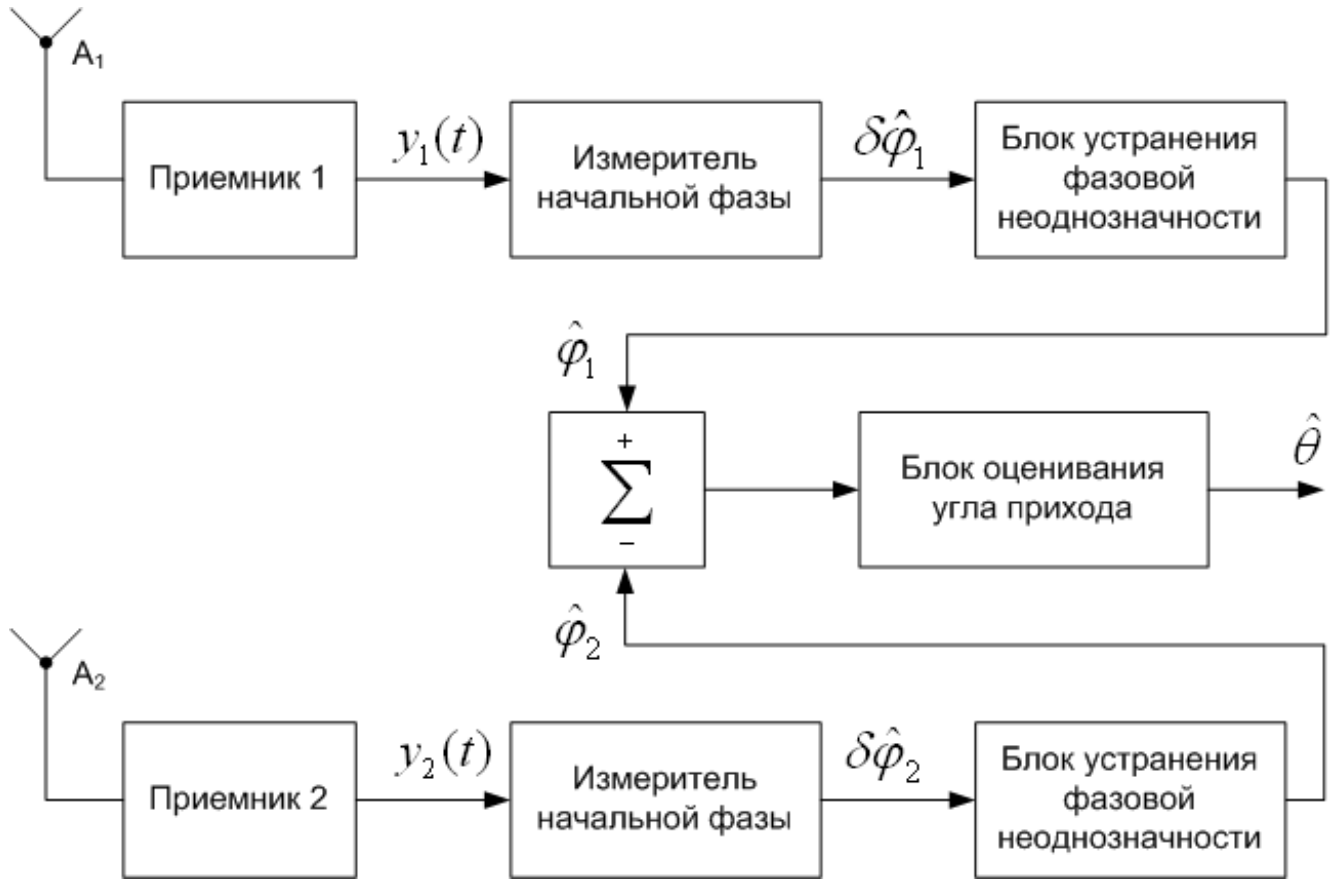
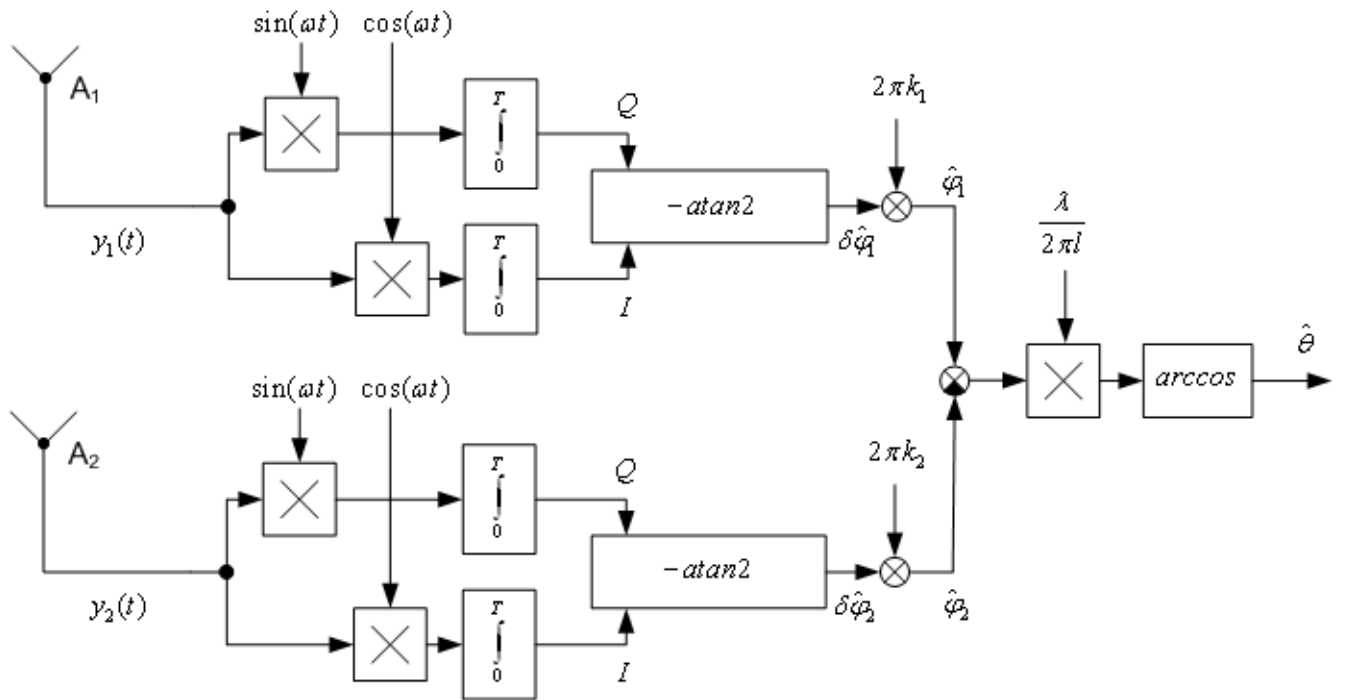


Рис. 2.2. Структурная схема устройства оценивания угла прихода сигнала по радиоинтерферометрическому методу

### 2.3 Потенциальная точность формируемой оценки

Определим вторую производную логарифма отношения правдоподобия, продифференцировав повторно выражение (2.12):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta} \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\frac{1}{D[y_{\Delta \hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \left[ y_{\Delta \hat{\varphi}} - \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right] \right) = \\
 &= -\frac{1}{D[y_{\Delta \hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \left[ y_{\Delta \hat{\varphi}} - \frac{2\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right] - \frac{1}{D[y_{\Delta \hat{\varphi}}]} \left( \frac{2\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 = \\
 &= -\frac{1}{D[y_{\Delta \hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l}{\lambda} \left[ \cos(\theta) \cdot y_{\Delta \hat{\varphi}} - \frac{2\pi l}{\lambda} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \right] = \\
 &= -\frac{1}{D[y_{\Delta \hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l}{\lambda} \left[ \frac{2\pi l \cos^2(\theta)}{\lambda} + \cos(\theta) \cdot n_{\Delta \varphi} - \frac{2\pi l}{\lambda} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \right] = \\
 &= -\frac{1}{D[y_{\Delta \hat{\varphi}}]} \frac{2\pi l}{\lambda} \left[ \cos(\theta) \cdot n_{\Delta \varphi} + \frac{2\pi l \sin^2(\theta)}{\lambda} \right]. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$



**Рис. 2.3.** Функциональная схема устройства оценивания угла прихода сигнала по радиоинтерферометрическому методу

Информация по Фишеру:

$$I(\theta) = -M_{\theta} \left[ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]} \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2 \sin^2(\theta). \quad (2.19)$$

Считаем, что выполняются условия, при которых справедлива форма неравенства (1.21), то есть смещение либо равно нулю, либо не зависит от истинного значения оцениваемого параметра. Если указанные условия не выполняются, то оценка заведомо неэффективная. Можно записать:

$$D[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{I(\theta)} \Rightarrow D[\hat{\theta}] \geq \frac{D[y_{\Delta\hat{\varphi}}]}{(2\pi l/\lambda)^2} \frac{1}{\sin^2(\theta)}. \quad (2.20)$$

Если при измерении начальных фаз в приемных точках была достигнута потенциальная дисперсия  $D_{min} = \frac{1}{2q}$ , то и дисперсия измерения разности фаз достигает минимальное значение:

$$D[y_{\Delta\hat{\varphi}}] = \frac{1}{2q} + \frac{1}{2q} = \frac{1}{q} \quad (2.21)$$

В этом случае правая часть неравенства (2.20) переходит в минимальную потенциальную дисперсию оценки угла прихода сигнала по радиоинтерферомет-

рическому методу:

$$D_{min}[\hat{\theta}] = \frac{1}{q} \frac{1}{(2\pi l/\lambda)^2} \frac{1}{\sin^2(\theta)}. \quad (2.22)$$

Несмотря на то, что потенциальная точность фазовых измерений определяется только отношением сигнал/шум в принятых реализациях, итоговая точность оценки угла прихода сигнала по радиоинтерферометрическому методу зависит от отношения сигнал/шум, реального угла прихода и размеров базовой линии в длинах волн. Потенциальная точность падает при отклонении направления прихода волны от нормали к базовой линии.

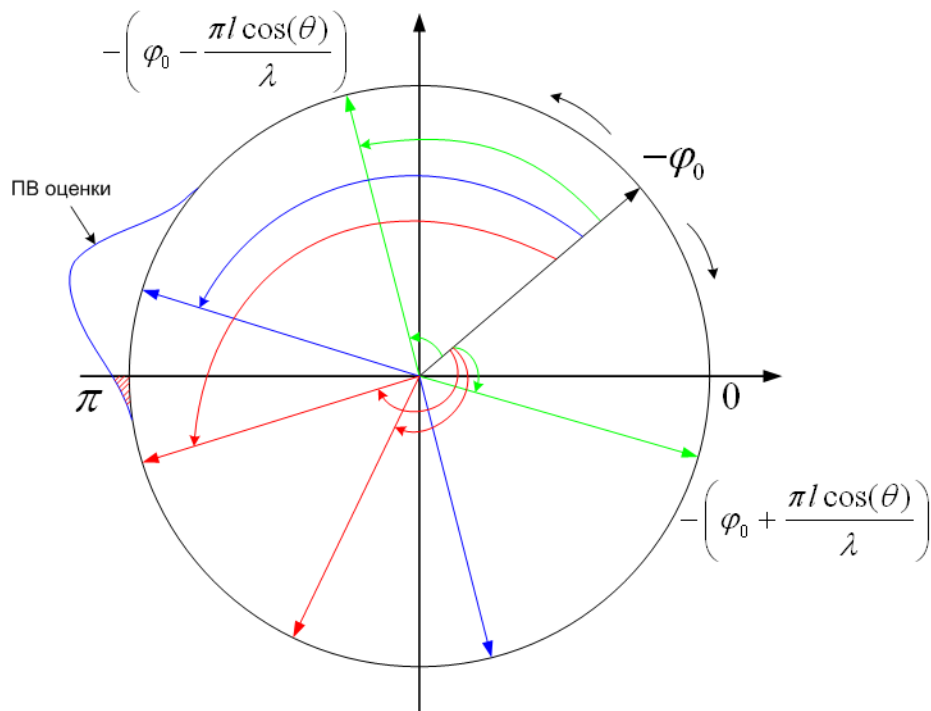
## 2.4 Причины возникновения неоднозначности

Алгоритм оценки угла прихода дает ряд решений, возникающую неоднозначность измерений необходимо устранять некоторым дополнительным блоком. Возможны два класса таких устройств: либо использующие только некоторую предварительную оценку с погрешностью меньшей шага ряда решений, либо обладающие некоторой дополнительной информацией, позволяющей устранить отдельные составляющие неоднозначности. Алгоритм работы первого класса устройств прост – достаточно выбрать решение, попадающие в интервал предварительной оценки. Главное требование при таком устраниии – увеличение шага неоднозначности между элементами ряда оценок. Возможности применения ограничены требованием к значению погрешности предварительной оценки. Рассмотрим причины возникновения неоднозначности измерений.

При условии исключения фазовой неоднозначности некоторым устройством извне полученный алгоритм не требует знание базовой фазы  $\varphi_0$ . Но возможно ли полное устранение неоднозначности при неизвестной базовой фазе?

Рассмотрим геометрическую интерпретацию радиоинтерферометрического оценивания по алгоритму (2.16). При построении будем использовать математические ожидания корреляционных компонент в соответствии с выводами параграфа 1.4, с. 12. Рассматривается угловая ориентация векторов, поэтому не будем акцентировать внимание на их амплитудах.





**Рис. 2.4.** К пояснению возникновения неоднозначностей в измерениях

Положим, в некотором эксперименте выпадает некоторое случайное значение базовой фазы  $\varphi_0$ . Откладываем соответствующий единичный вектор  $e^{-j\varphi_0} = e^{-j\varphi_0^p}, \varphi_0^p \in [-\pi; \pi]$  на комплексной плоскости (рис. 2.4). Начальные фазы принимаемых сигналов отстоят на  $\pm \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$  от  $\varphi_0^p$ , изображаем их векторами  $e^{-j(\varphi_0^p - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda})} = e^{-j\delta\varphi_2}, \delta\varphi_2 \in [-\pi; \pi]; e^{-j(\varphi_0^p + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda})} = e^{-j\delta\varphi_1}, \delta\varphi_1 \in [-\pi; \pi]$ . Концы указанных векторов образуют три точки на единичной окружности.

Радиоинтерферометрический метод требует восстановления по оценкам  $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$  оценок полных начальных фаз  $\varphi_0^p + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}, \varphi_0^p - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ . Рассмотрим случай отсутствия флуктуационных корреляционных компонент, то есть случай  $N_0 = 0$ . При этом, согласно выкладкам параграфа 1.4, с. 12, оценки максимального правдоподобия начальных фаз совпадают с истинными значениями. То есть вектора  $e^{-j\delta\varphi_{1,2}}$  являются интерпретацией и истинных значений фаз (приведенных к интервалу  $[-\pi, \pi]$ ), и их оценок максимального правдоподобия (без устранения неоднозначности).

Проведем мысленный эксперимент. Положим  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} = 0$ . В этом случае все три точки совпадают и находятся в интервале  $[-\pi; \pi]$ . Математические

ожидания результатов измерения начальной фазы каждого сигнала совпадают, внесение дополнительных поправок не требуется. Теперь будем постепенно увеличивать  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ . Соответствующие сигналам точки при этом расходятся по окружности. В некоторый момент одна (либо при  $\varphi_0^p = 0$  обе одновременно) точка выходит за пределы интервала  $[-\pi; \pi]$ . В этот момент оценка её фазы скачком изменяется на  $2\pi$ . Затем подобное повторяется для второй точки. Таким образом,  $\xi$  в выражении (2.16) – это число переходов векторов через точку  $\pi$ . Можно записать:

$$\xi_1 = \text{fix}\left(\frac{\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} + \varphi_0 + \pi}{2\pi}\right) \quad (2.23)$$

для переходов вектора, соответствующей первому сигналу, при  $\theta < 90^\circ$  (*fix* - операция округления в меньшую сторону). Аналогичное выражение будет возникать для второго сигнала.

При  $N_0 \neq 0$  под воздействием флуктуационных составляющих появляется вероятность перехода оценки в соседний период относительно истинного значения. Такую неоднозначность без знания истинного значения параметра устранить не представляется возможным.

Под *неоднозначностью*, для простоты изложения, будем понимать не только само явление, но и величину, необходимую для устранения неоднозначности.

В неоднозначности оценки можно выделить слагаемые и классифицировать их по причине возникновения. *Основной неоднозначностью* будем называть неоднозначность, вызванную выходом истинного значения  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$  за пределы интервала  $[-\pi; \pi]$ . Это неоднозначность, возникающая из-за периодичности гармонического колебания. Для алгоритма (2.16) принимает значения кратные  $2\pi$  (для оценки  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ ). Неоднозначность, не относящуюся к основной будем называть *дополнительной неоднозначностью*.

В дополнительной неоднозначности выделим базовую дополнительную и шумовую дополнительную.

*Базовая дополнительная неоднозначность* – неоднозначность, вызванная неизвестностью базовой фазы. Вызвана вышеописанными особенностями изме-

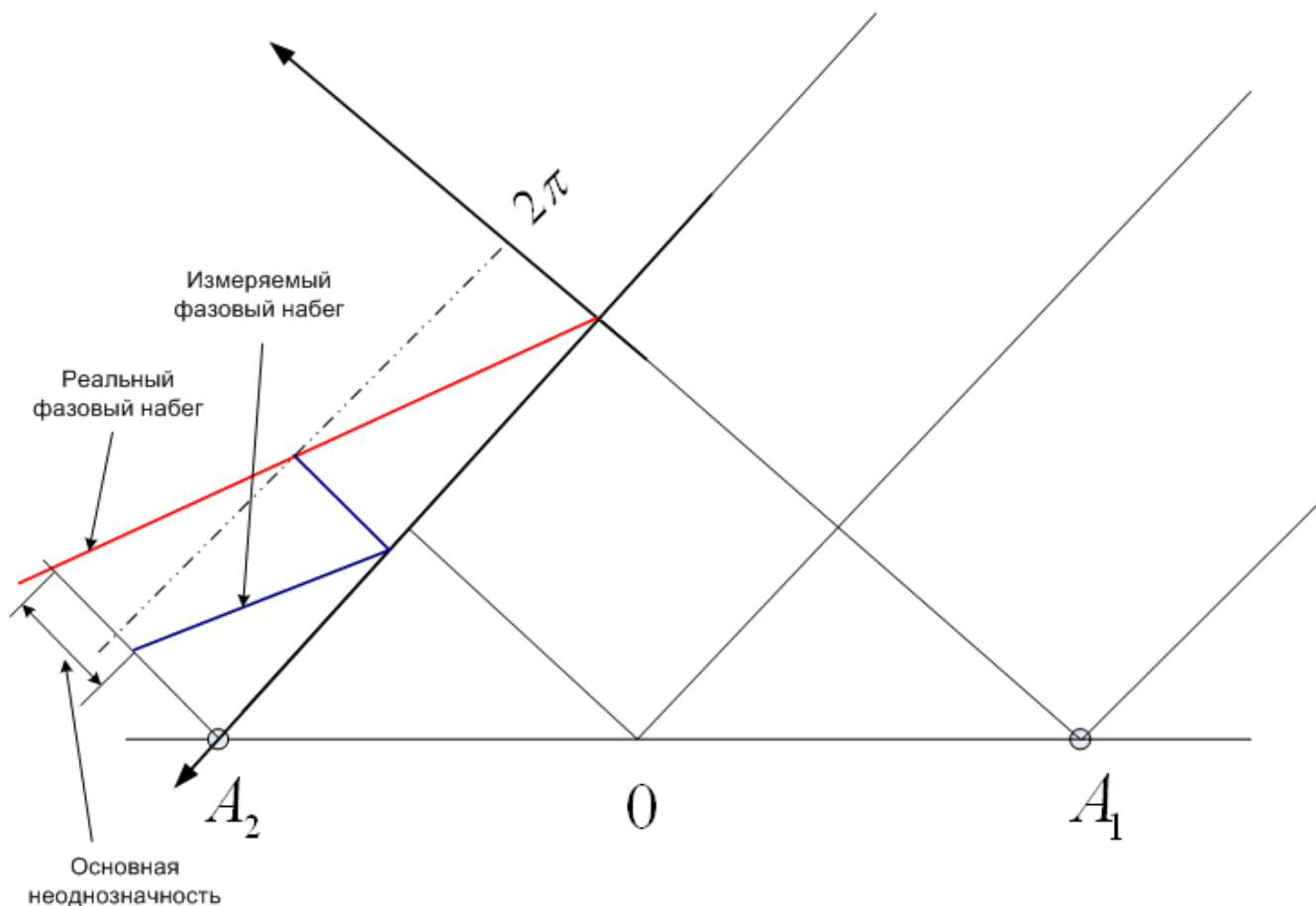


Рис. 2.5. К пояснению возникновения основной неоднозначности в измерениях

рения начальных фаз в точках приема. Для алгоритма (2.16) принимает значения  $0$ ,  $\pi$  или  $-\pi$  (для оценки  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ ). Выражение (2.23) производит устранение основной и базовой дополнительной неоднозначностей, но требует для этого знание базовой фазы.

*Шумовая дополнительная неоднозначность* – неоднозначность, вызванная переходом оценки под действием шума в соседний период относительно истинного значения, либо скачком оценки из-за перемены знака оцениваемых функций под действием шума. Для алгоритма (2.16) принимает значения  $0$ ,  $\pm\pi$  или  $\pm 2\pi$  (для оценки  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ ).

## 2.5 Моделирование работы алгоритма

Проведем компьютерное моделирование работы радиоинтерферометрического алгоритма (2.16). Исследуем экспериментальную дисперсию ошибки оце-

нивания, её связь с границей Рао-Крамера при разных отношениях сигнал/шум, а также смещенность оценки.

При моделировании будем использовать два способа устранения фазовой неоднозначности измерений: при известной базовой фазе по методу типа (2.23); при неизвестной базовой фазе по истинному значению  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$  находить необходимое число целых дополнительных  $\pi$ . Первый способ возможен на практике при дополнительном измерении базовой фазы и грубой оценке  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$  (например, по разнице фаз дальномерного кода, который не рассматривался в данной постановке задачи). Второй метод требует предварительной грубой оценки  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ . Оба варианта можно реализовать на практике, однако в первом случае рациональней пересмотреть решение задачи ввиду изменившихся условий – учитывать известную базовую фазу в опорных колебаниях корреляторов.

Как уже было сказано в предыдущем параграфе, для устранения скачков оценки фазы при выходе из периода под действием флуктуационных составляющих необходимо знать истинное значение оцениваемого параметра. Так как при моделировании оно известно, то рассмотрим два случая – с устранением шумовой дополнительной неоднозначности и без устранения.

$$\text{Обозначим: } F = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}, \hat{F} = \frac{\pi l \cos(\hat{\theta})}{\lambda}.$$

При решении задачи предполагалось полное устранение неоднозначности измерений. Но в условиях задачи без знания истинных значений  $F$  и базовой фазы  $\varphi_0$  провести полное устранение неоднозначности измерений в общем случае невозможно. Их знание же приводит к переформулировке и вырождению задачи – по известным истинным значениям алгебраически определяется истинное значение угла прихода сигнала. Очевидно, для каждого варианта устранения неоднозначности существуют поверхности среднего квадрата ошибки оценки и смещения оценки на множестве значений  $(F, \varphi_0)$ . В этом случае базовая фаза рассматривается как фиксированный известный параметр. Сформируем оценки этих поверхностей на компьютерной модели для трех вариантов устранения неоднозначности:

1. устранение только основной неоднозначности;

2. устранение основной неоднозначности и базовой неоднозначности;
3. полное устранение неоднозначности.

Проводим множество серий экспериментов, в каждой серии фиксируем набор параметров  $(\varphi_0, \theta)_j$ . В каждом эксперименте серии производим оценку  $\hat{\theta}$  и вычисляем величины:

$$\Delta_{\theta,i} = \theta_j - \hat{\theta}_i, \quad (2.24)$$

$$D_{\theta,i}^{\text{CKO}} = \left(\theta_j - \hat{\theta}_i\right)^2, \quad (2.25)$$

где  $i$  – номер эксперимента,  $j$  - номер серии.

По набранным статистикам производим оценки смещения и среднего квадрата ошибки оценивания при фиксированных параметрах  $(\varphi_0, \theta)_j$ :

$$\Delta_{\theta,j} = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta_{\theta,i}}{N}, \quad (2.26)$$

$$D_{\theta,j}^{\text{CKO}} = \frac{\sum_{i=1}^N D_{\theta,i}^{\text{CKO}}}{N - 1}, \quad (2.27)$$

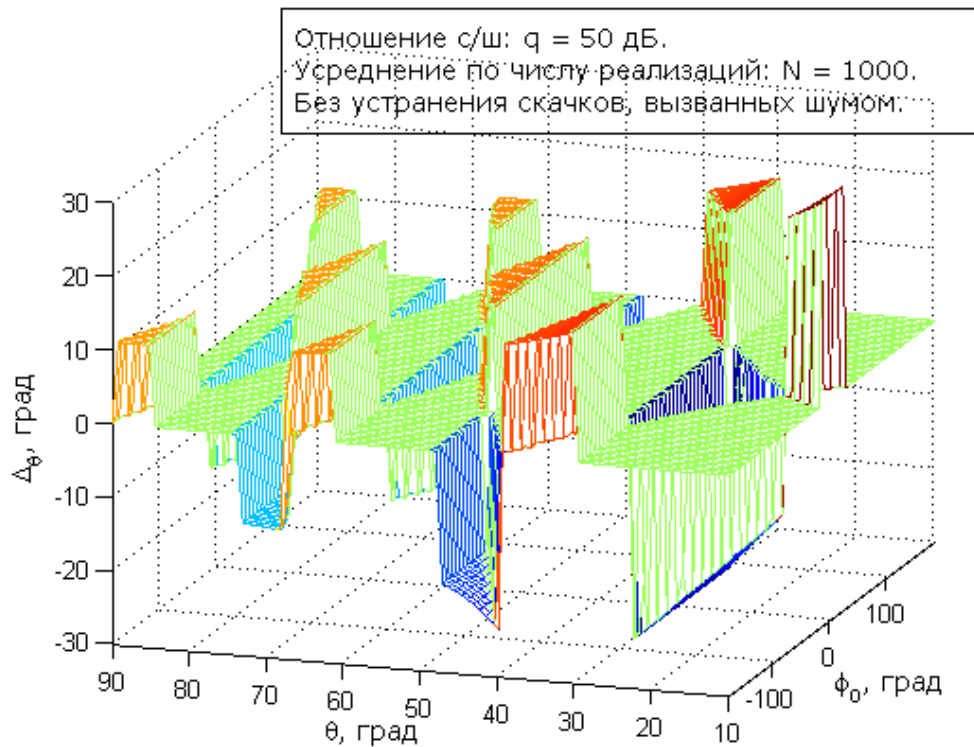
где

$N$  – число экспериментов в серии.

Далее повторяем вычисления для следующей серии. В итоге получаем поверхность оценок интересующих нас параметров.

### 2.5.1 Моделирование при устранении только основной неоднозначности

Поверхность смещения при устранении основной неоднозначности приведена на рис. 2.6. Отчетливо видны области, в которых присутствуют смещения. Как и предполагалось, смещения локализованы в областях, где базовая фаза  $\varphi_0$  близка к  $\pm\pi$ . Наличие смещений приводит к возрастанию среднего квадрата ошибки оценивания в соответствующих областях до сотен квадратных градусов.



**Рис. 2.6.** Поверхность смещения при устранении только основной неоднозначности.

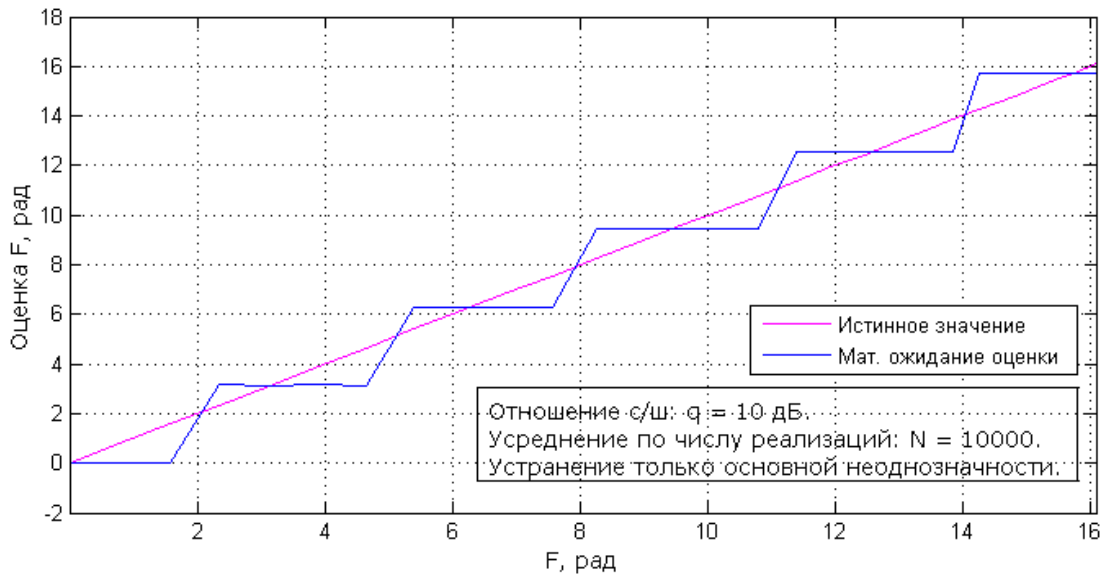
Результат моделирования.

В исходной постановке задачи базовая фаза – случайный параметр. Проведем моделирование при случайной  $\varphi_0$ , распределенной равномерно на интервале  $[-\pi; \pi]$  (рис. 4.1, с. 70).

На рисунке 2.7 представлена зависимость оценки  $\hat{F}$  от истинного значения  $F$  при усреднении по  $\varphi_0$ . Как видим, усреднение по базовой фазе приводит к смещенным оценкам.

На рисунке 2.8 представлена зависимость оценки  $\hat{F}$  при некотором фиксированном значении  $\varphi_0$ . В качестве экспериментального взято  $\varphi_0 = 1.9\pi$ . Из приведенной зависимости следует, что при фиксированных значениях базовой фазы могут существовать диапазоны углов прихода сигнала, при которых отсутствует смещение оценки. Это означает, что на практике можно получить оценку, проведя серию экспериментов за достаточно короткое время, при котором  $\varphi_0$  остается неизменным.

На рисунках 2.9, 2.10 представлены выборочные средние квадраты ошибок



**Рис. 2.7.** Оценка  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

ки  $\hat{\theta}$  при различных отношениях сигнал/шум и фиксированном значении  $\varphi_0$ . Из графиков видно, что при отсутствии исключения дополнительных неопределенностей при фиксированном неизвестном  $\varphi_0$  средний квадрат ошибки оценки имеет аномальные выбросы при определенных углах прихода, зависящих от выпавшего значения  $\varphi_0$ . На рис. 2.11 представлена оценка среднего квадрата ошибки как функции истинного значения  $F$ .

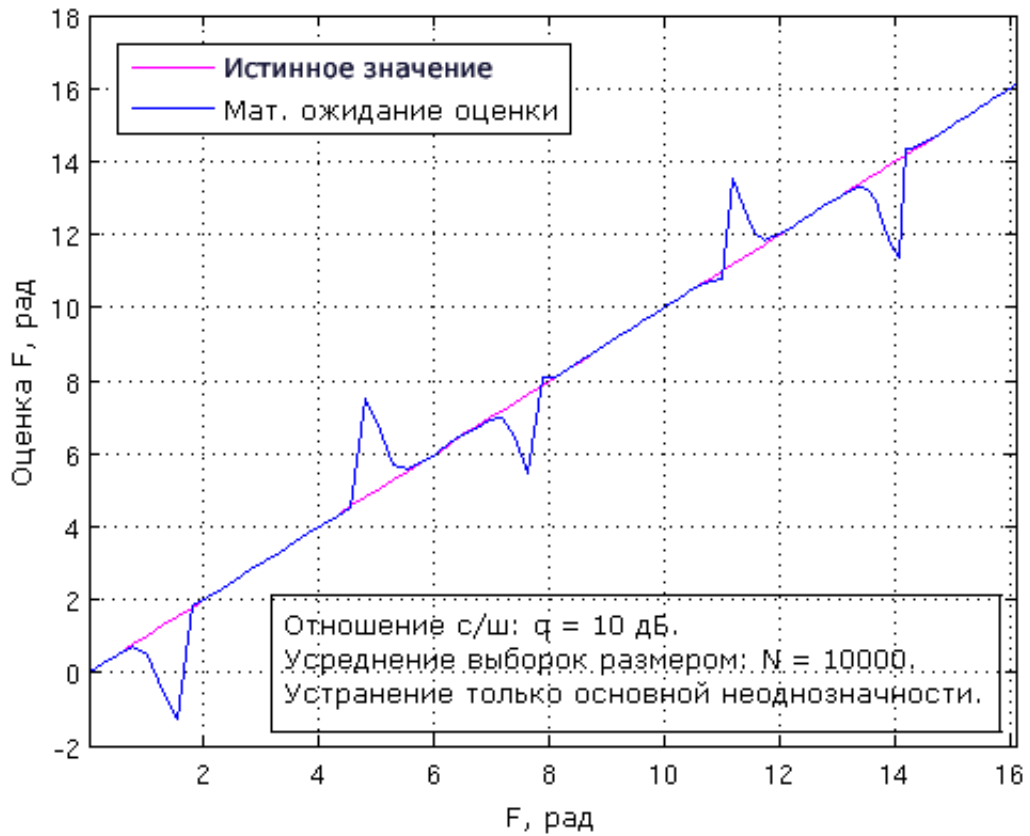


Рис. 2.8. Оценка  $\hat{F}$  при фиксированном  $\varphi_0 = 1.9\pi$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

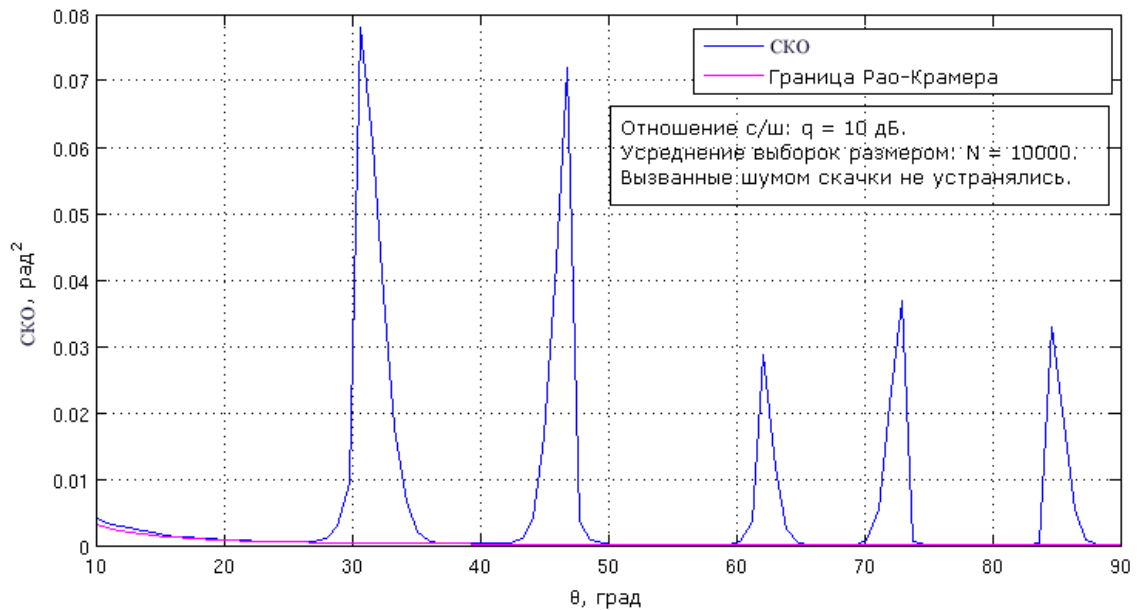
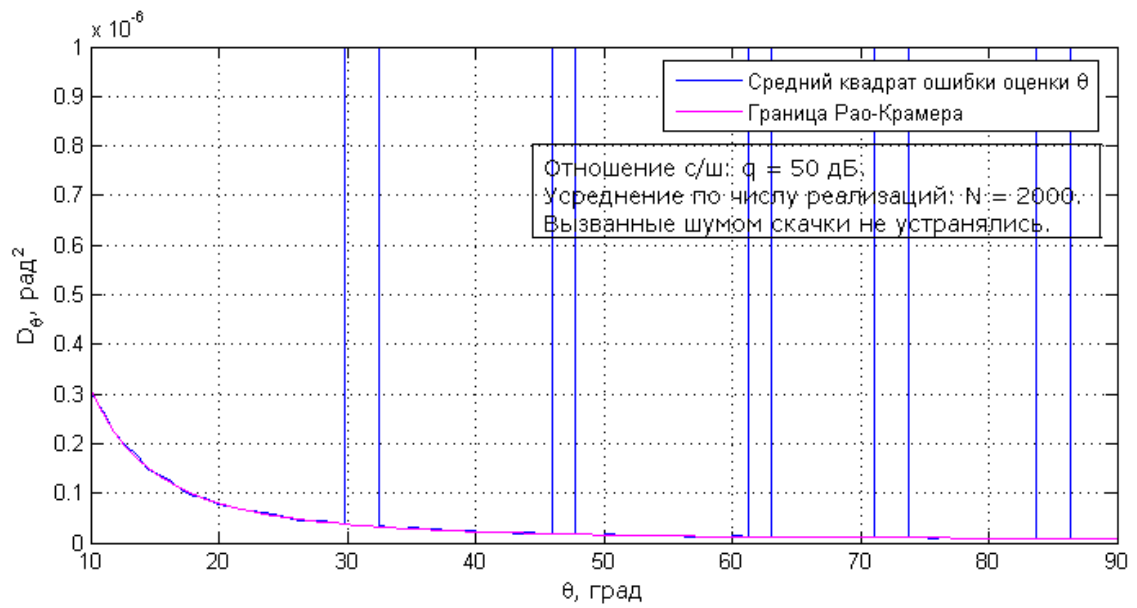
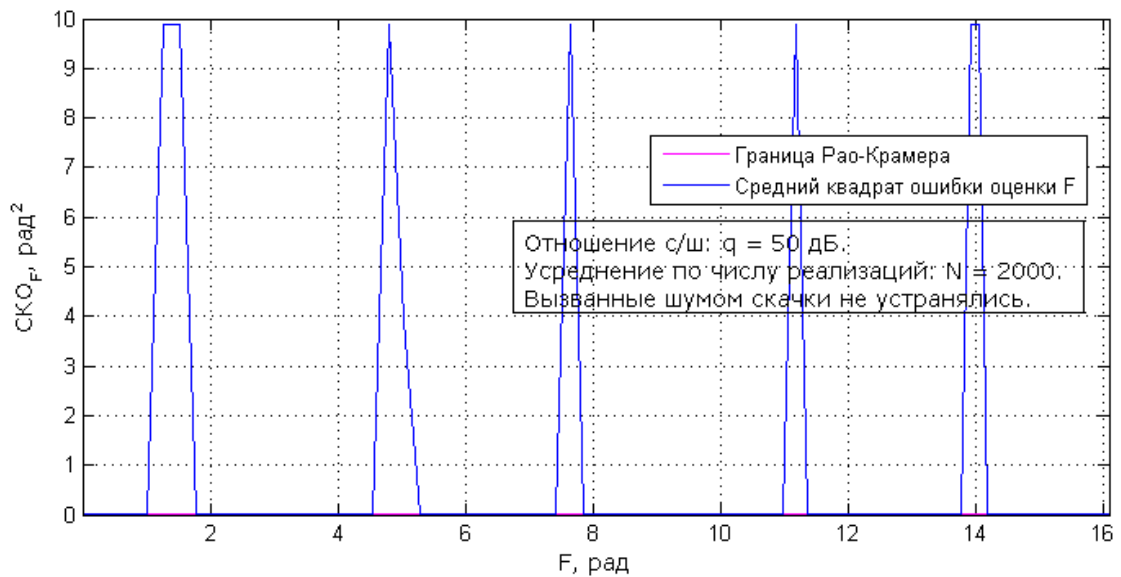


Рис. 2.9. Оценка среднего квадрата ошибки  $\hat{\theta}$  при фиксированном  $\varphi_0 = 1.9\pi$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.





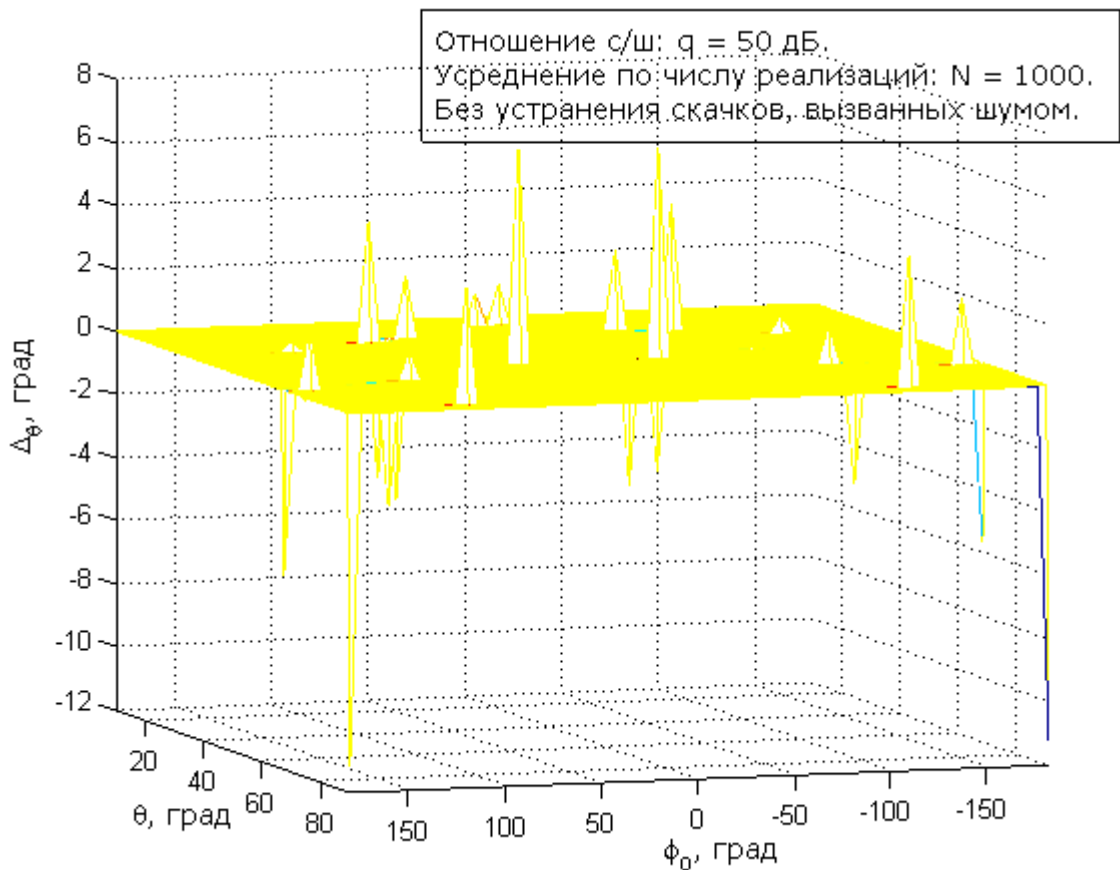
**Рис. 2.10.** Оценка среднего квадрата ошибки  $\hat{\theta}$  при фиксированном  $\varphi_0 = 1.9\pi$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.



**Рис. 2.11.** Оценка среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  при фиксированном  $\varphi_0 = 1.9\pi$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

## 2.5.2 Моделирование при устранении основной неоднозначности и базовой дополнительной неоднозначности

При моделировании доступно истинное значение базовой фазы, воспользуемся этим для устранения дополнительной базовой неоднозначности. Сравнивая результаты с результатами предыдущего пункта проверим её влияние на смещение и средний квадрат ошибки.



**Рис. 2.12.** Поверхность смещения при устранении основной и базовой дополнительной неоднозначностей. Результат моделирования.

Поверхность смещения при устранении основной неоднозначности и дополнительной базовой неоднозначности приведена на рис. 2.12. Прежние области смещенности оценок исчезли. Существуют небольшие всплески, видимо вызванные смещением из-за шумовой неопределенности. При уменьшении отношения сигнал/шум число всплесков увеличивается.

На рис. 2.13 представлена зависимость оценки  $\hat{F}$  от истинного значения  $F$

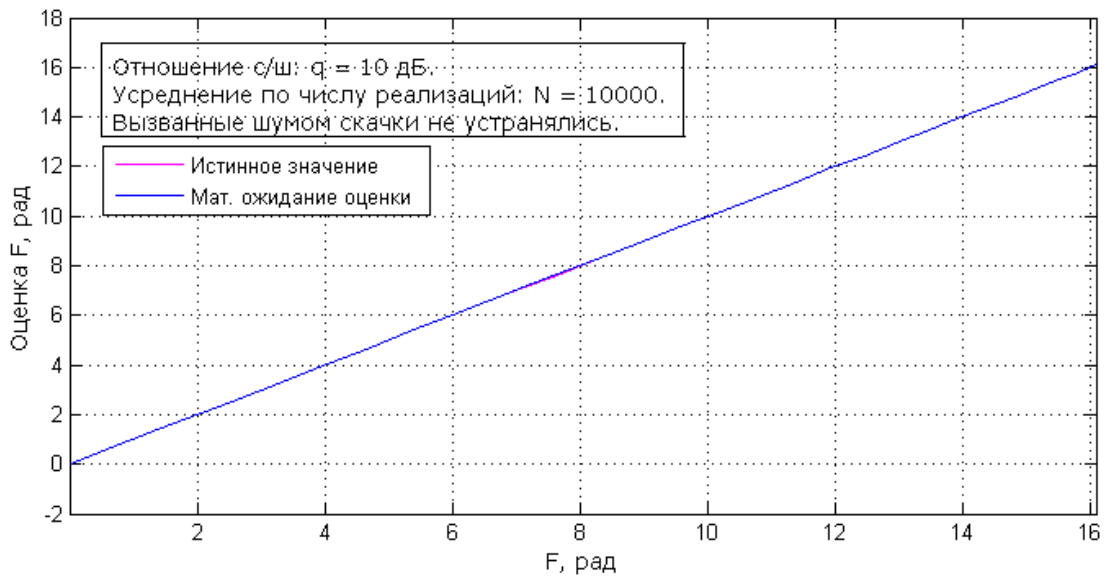


Рис. 2.13. Оценка  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении основной и дополнительной базовой неоднозначностей. Результат моделирования.

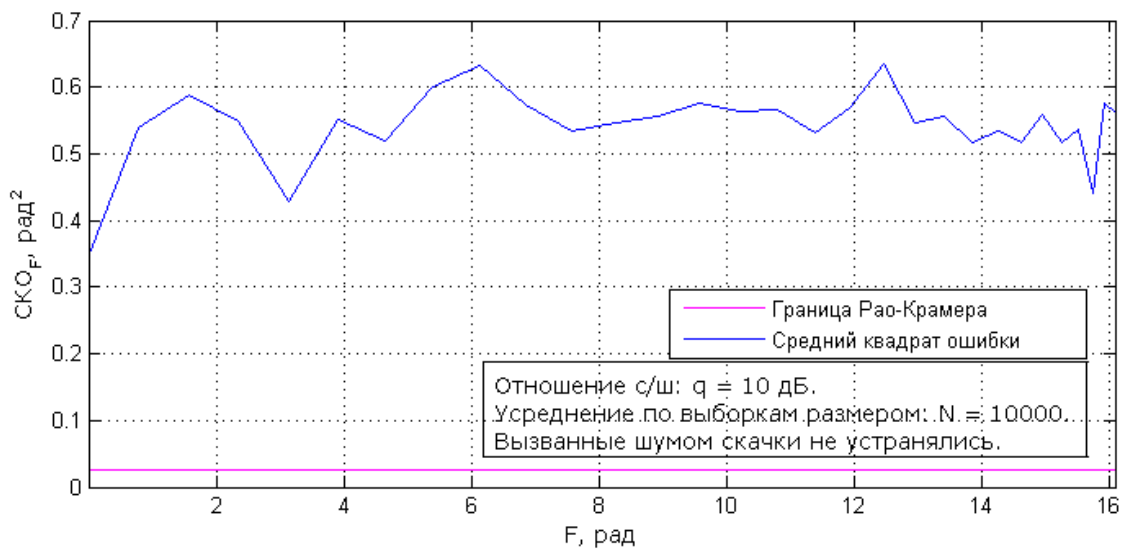
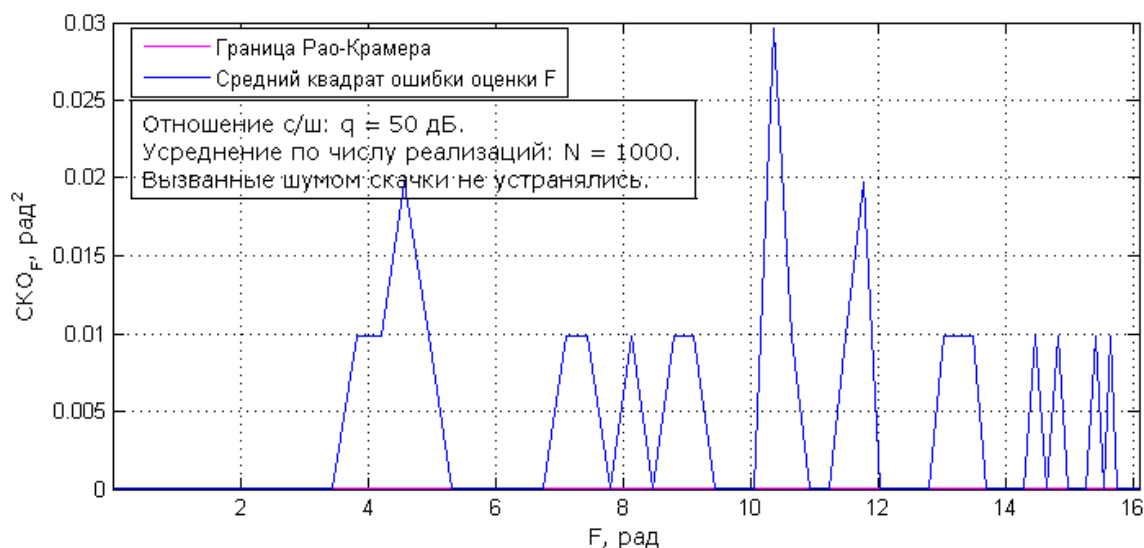


Рис. 2.14. Оценка среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении основной и дополнительной базовой неоднозначностей. Результат моделирования.



**Рис. 2.15.** Оценка среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении основной и дополнительной базовой неоднозначностей. Результат моделирования.

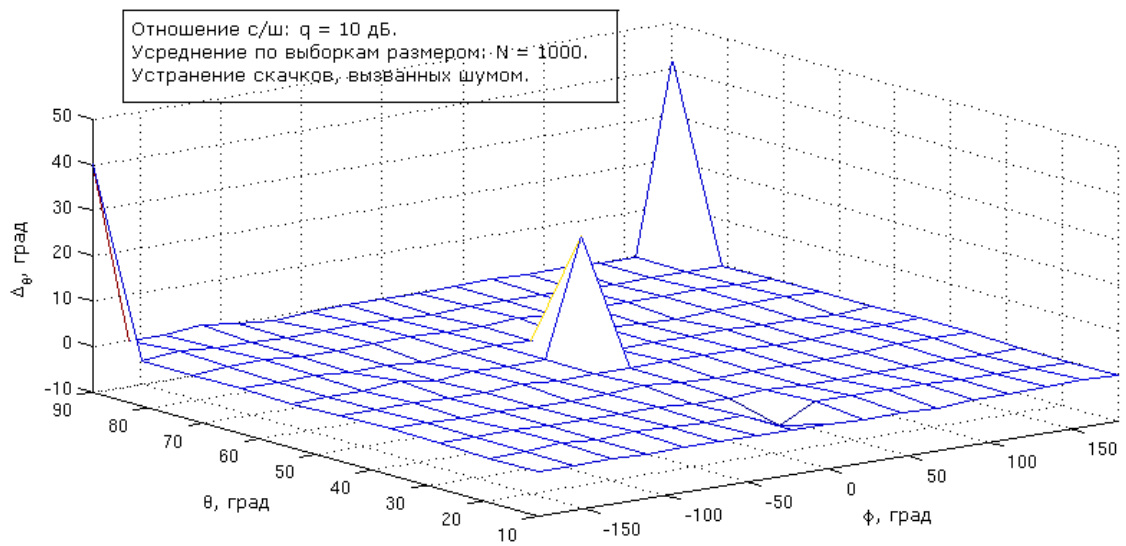
при исключении основной и дополнительной базовой неопределенностей. Усредненная по базовой фазе оценка в этом случае оказывается несмещенной.

На рисунках 2.14, 2.15 представлены оценки среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  при различных отношениях сигнал/шум. Изучение графиков выявило, что при увеличении отношения сигнал/шум средний квадрат ошибки оценки угла прихода сигнала стремится к потенциальной дисперсии. При малых же отношениях сигнал/шум средний квадрат ошибки оценки значительно превышает границу Рао-Крамера. Наблюдаются аномальные скачки, объясняемые воздействием шумовой неопределенности.

### 2.5.3 Моделирование при полном устранении неоднозначности

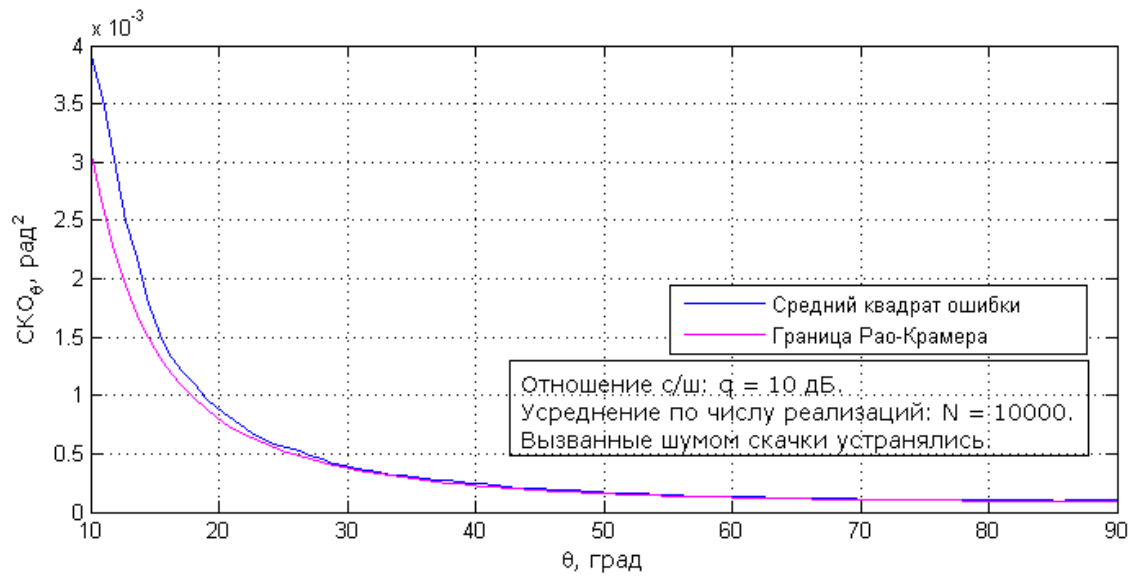
Поверхность смещения при полном устранении неоднозначности и малом отношении сигнал/шум приведена на рис. 2.16. Несмотря на малое отношение сигнал/шум практически на всей области допустимых значений отсутствует смещение. Отдельные всплески объясняются несовершенством реализации устранения шумовой неоднозначности при моделировании.

На рисунках 2.17, 2.18 представлены оценки среднего квадрата ошибки

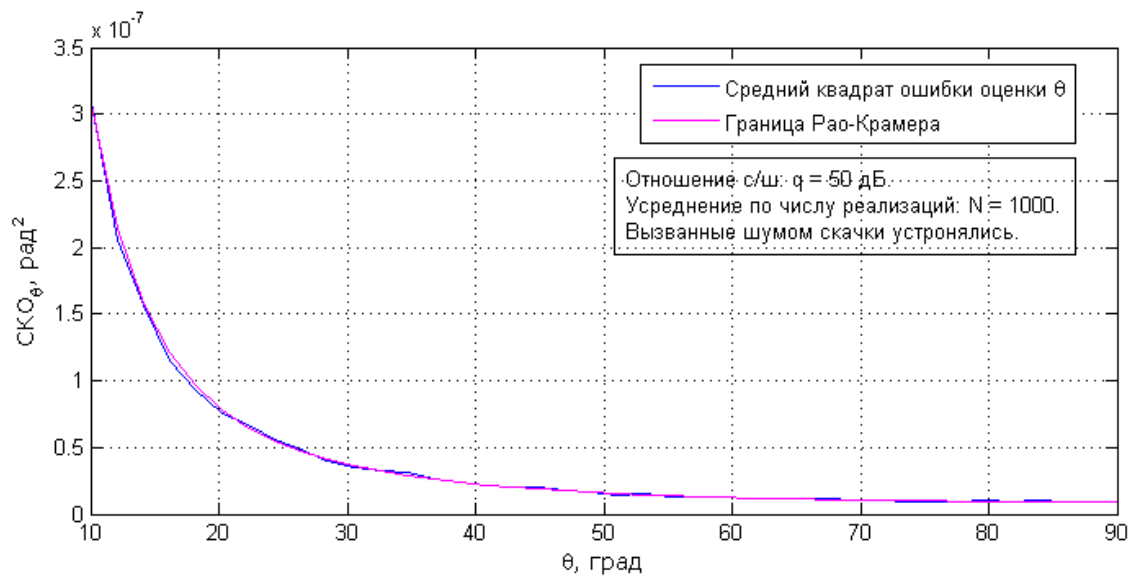


**Рис. 2.16.** Поверхность смещения при полном устранении неоднозначности. Результат моделирования.

$\hat{\theta}$  при различных отношениях сигнал/шум. При увеличении отношения сигнал/шум средний квадрат ошибки оценки угла прихода сигнала стремится к потенциальной дисперсии.



**Рис. 2.17.** Оценка среднего квадрата ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и полном исключении неоднозначности. Результат моделирования.



**Рис. 2.18.** Оценка среднего квадрата ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и полном исключении неоднозначности. Результат моделирования.

## 2.6 Выводы

Потенциальная дисперсия оценки угла прихода сигнала по радиоинтерферометрическому методу зависит от отношения сигнал/шум в принимаемых реализациях, от расстояния между точками приема и направления прихода сигнала. С уменьшением расстояния между точками приема ухудшается точность производимых оценок. При отклонении направления прихода сигнала от нормали к базовой линии, происходит уменьшение эквивалентного расстояния между точками приема и уменьшение точности оценок.

В неоднозначности оценок, в зависимости от источника неоднозначности, можно выделить три слагаемых: основную, дополнительную базовую и дополнительную шумовую. Для устранения основной неоднозначности необходимо иметь некоторую оценку разности фаз сигналов в принимаемых точках. Для устранения базовой неоднозначности требуется дополнительно знать базовую фазу.

При случайной базовой фазе усредненная оценка при устранении только основной неоднозначности оказывается смещенной во всем диапазоне углов, за исключением нескольких точек. Если же базовую фазу зафиксировать, то появляются области несмещенных оценок. При известной базовой фазе и устранении с помощью неё базовой дополнительной неопределенности, смещенность отсутствует. Явление объясняется особенностями измерения фаз в точках приема.

При отношении сигнал/шум  $q = 50$  дБ на модели была достигнута точность близкая к потенциальной. При исключении основной и базовой неопределенностей потенциальная точность достигается во всем исследованном диапазоне углов. При исключении только основной неопределенности и фиксации базовой фазы – во всем диапазоне углов за исключением аномальных зон.

### 3 Алгоритм оптимального оценивания угла прихода сигнала при известной базовой фазе

#### 3.1 Постановка задачи

Как и в радиоинтерферометрическом методе, в двух точках базовой линии (тт.  $A_1$  и  $A_2$ , рис. 2.1, с. 25), разнесенных на расстояние  $l$ , производится прием сигнала от одного источника. Расстояние до источника достаточно велико, проходящую волну можно считать плоской, падающей под углом  $\theta$  к базовой линии. Точку  $O$ , являющейся центром антенны, назовем *базовой точкой*. Она лежит на базовой линии и равноудалена от точек приема  $A_1$  и  $A_2$ .

Начальными фазами назовем фазы колебаний в начальный момент времени. Начальную фазу базовой точки назовем *базовой фазой*.

Исходные данные и условия:

- Структура сигнала - гармоническое колебание с известными частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ .
- Длина волны (известна) -  $\lambda$ .
- В базовой точке  $O$  сигнал имеет известную начальную фазу (базовую фазу)  $\varphi_0$ .
- Геометрия антенны известна, включая расстояние  $l$ , а как следствие - известна структура сигналов в точках  $A_1$  и  $A_2$ :

$$S_1(t, \theta; l, \lambda, A, \omega, \varphi_0) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right), \quad t \in [0; T]; \quad (3.1)$$

$$S_2(t, \theta; l, \lambda, A, \omega, \varphi_0) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right), \quad t \in [0; T]. \quad (3.2)$$

В дальнейшем для наглядности выражений опустим обозначения известных параметров:  $S_1(t, \theta; l, \lambda, A, \omega, \varphi_0) \rightarrow S_1(t, \theta)$ ,  $S_2(t, \theta; l, \lambda, A, \omega, \varphi_0) \rightarrow S_2(t, \theta)$ .



- Сигналы принимаются на фоне независимых АБГШ  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  с двухсторонними спектральными плотностями  $N_0/2$ .
- Прием производится на временном интервале с длительностью  $T$ .
- Период наблюдения  $T$  либо кратен периоду колебаний, либо многократно превышает его.
- Происходит разрешение неоднозначности некоторым сторонним методом.

Апостериорными данными являются принятые на фоне АБГШ реализации сигналов (3.1), (3.2):

$$y_1(t) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) + n_1(t) = S_1(t, \theta) + n_1(t), \quad t \in [0; T]; \quad (3.3)$$

$$y_2(t) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) + n_2(t) = S_2(t, \theta) + n_2(t), \quad t \in [0; T]. \quad (3.4)$$

Требуется получить оптимальную, в смысле максимума функции правдоподобия, оценку угла прихода сигнала.

## 3.2 План решения задачи

Получить оценку, обеспечивающую максимум функции правдоподобия, позволяет метод максимального правдоподобия (пар. 1.1, с. 6; пар. 1.2, с. 9). Оценки, получаемые по данному методу, часто оказываются несмещенными. При этом, при больших отношениях сигнал/шум, дисперсия оценок максимального правдоподобия стремится к нижней границе Рао-Крамера, что при выполнении условия несмещенности означает их приближение к эффективным. В этом случае выполняется требование минимизации дисперсии ошибки.

В решении задачи можно выделить следующие шаги:

1. Составить отношение правдоподобия основываясь на параграфе 1.1.
2. Продифференцировать полученное отношение правдоподобия по оцениваемому параметру — углу  $\theta$ .

3. Приравнять результат дифференцирования нулю и найти корни полученного уравнения, соответствующие максимуму функции правдоподобия.
4. Для полученной оценки найти потенциальную дисперсию по неравенству Рао-Крамера.

### 3.3 Отношение правдоподобия

По условию, аддитивные БГШ выборок независимые. Данное допущение хорошо согласуется с практикой, так как основными источниками шума являются аналоговые части приемников. Выборки получены с разных приемников, и как следствие, шумы образованы разными источниками. Для случая двух сигналов с независимыми АБГШ в пар. 1.1 приведено выражение для отношения правдоподобия; воспользуемся его логарифмом:

$$\ln(\rho(\theta)) = \frac{2}{N_0} \left\{ \int_0^T y_1(t) S_1(t, \theta) dt + \int_0^T y_2(t) S_2(t, \theta) dt - E \right\}, \quad (3.5)$$

$$\text{где } E = \frac{1}{2} \int_0^T (S_1(t, \theta))^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T (S_2(t, \theta))^2 dt.$$

С учетом (3.1), (3.2) имеем:

$$\begin{aligned} \ln(\rho(\theta)) = \frac{2A}{N_0} \{ & \cos\left(\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}\right) \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt - \\ & - \sin\left(\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}\right) \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt + \\ & + \cos\left(\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}\right) \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt + \\ & + \sin\left(\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}\right) \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt - E \}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Интегралы представляют собой корреляционные компоненты, которые не зависят от  $\theta$ . Перепишем выражение в краткой форме:

$$\begin{aligned} \ln(\rho(\theta)) = \frac{2A}{N_0} \{ & \cos(F(\theta)) \dot{I}_1(\varphi_0) - \sin(F(\theta)) \dot{Q}_1(\varphi_0) + \\ & + \cos(F(\theta)) \dot{I}_2(\varphi_0) + \sin(F(\theta)) \dot{Q}_2(\varphi_0) - E \}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}; \\ \dot{I}_1(\varphi_0) &= \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt; \\ \dot{I}_2(\varphi_0) &= \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt; \\ \dot{Q}_1(\varphi_0) &= \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt; \\ \dot{Q}_2(\varphi_0) &= \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt. \end{aligned}$$

### 3.4 Дифференцирование логарифма отношения правдоподобия

Найдем глобальный максимум логарифма отношения правдоподобия, для чего продифференцируем выражение (3.7) по оцениваемому параметру и приравняем результат нулю.

При заданных условиях на период наблюдения, энергия сигналов не зависит от угла прихода сигнала. Тогда производная энергии по углу обращается в ноль:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{2A}{N_0} \left\{ \cos(F(\theta)) \dot{I}_1(\varphi_0) - \sin(F(\theta)) \dot{Q}_1(\varphi_0) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(F(\theta)) \dot{I}_2(\varphi_0) + \sin(F(\theta)) \dot{Q}_2(\varphi_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражение под частной производной является сложной функцией, воспользовавшись теоремой  $\frac{\partial f(F(\theta))}{\partial \theta} = \frac{\partial f(F)}{\partial F} \cdot \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta} &= -\frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \cdot \frac{2A}{N_0} \cdot \left\{ -\sin(F(\theta)) \dot{I}_1(\varphi_0) - \cos(F(\theta)) \dot{Q}_1(\varphi_0) - \right. \\ &\quad \left. - \sin(F(\theta)) \dot{I}_2(\varphi_0) + \cos(F(\theta)) \dot{Q}_2(\varphi_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.5 Экстремумы отношения правдоподобия

Приравниваем выражение (3.9) нулю и ищем корни:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi l \sin(\hat{\theta})}{\lambda} \cdot \frac{2A}{N_0} \cdot \left\{ -\sin(F(\hat{\theta})) \dot{I}_1(\varphi_0) - \cos(F(\hat{\theta})) \dot{Q}_1(\varphi_0) - \right. \\ \left. - \sin(F(\hat{\theta})) \dot{I}_2(\varphi_0) + \cos(F(\hat{\theta})) \dot{Q}_2(\varphi_0) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Условие  $\sin(\hat{\theta}) = 0$  не может описывать алгоритм оценки в общем случае, а значит не связано с глобальным максимумом функции правдоподобия. Остается второй множитель:

$$\begin{aligned} & - \sin(F(\hat{\theta}))\dot{I}_1(\varphi_0) - \cos(F(\hat{\theta}))\dot{Q}_1(\varphi_0) - \\ & - \sin(F(\hat{\theta}))\dot{I}_2(\varphi_0) + \cos(F(\hat{\theta}))\dot{Q}_2(\varphi_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Преобразуем уравнение к виду, определяющему алгоритм нахождения корней:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(F(\hat{\theta})) &= \frac{\dot{Q}_2(\varphi_0) - \dot{Q}_1(\varphi_0)}{\dot{I}_2(\varphi_0) + \dot{I}_1(\varphi_0)} = \\ &= \frac{\int_0^T y_2(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt - \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt}{\int_0^T y_2(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt + \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} F(\hat{\theta}) &= \operatorname{arctg} \frac{\dot{Q}_2(\varphi_0) - \dot{Q}_1(\varphi_0)}{\dot{I}_2(\varphi_0) + \dot{I}_1(\varphi_0)} + \pi n, n \in \mathbb{Z} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{\int_0^T y_2(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt - \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt}{\int_0^T y_2(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt + \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arccos \left( \frac{\lambda}{\pi l} \cdot \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\dot{Q}_2(\varphi_0) - \dot{Q}_1(\varphi_0)}{\dot{I}_2(\varphi_0) + \dot{I}_1(\varphi_0)} + \pi n \right\} \right), n \in \mathbb{Z} = \\ &= \arccos \left( \frac{\lambda}{\pi l} \cdot \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\int_0^T y_2(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt - \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t + \varphi_0) dt}{\int_0^T y_2(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt + \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t + \varphi_0) dt} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \pi z \right\} \right), z \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Функциональная схема оценивания угла прихода по полученному алгоритму приведена на рис. 3.1.

В полученном алгоритме участвует базовая фаза  $\varphi_0$ , что накладывает ограничения на возможность его использования на практике. По вычислительным же затратам он менее требователен по сравнению с радиоинтерферометрическим алгоритмом, — операция деления производится один раз, вместо функции  $\operatorname{atan2}$  используется арктангенс. В некоторых приложениях может оказаться

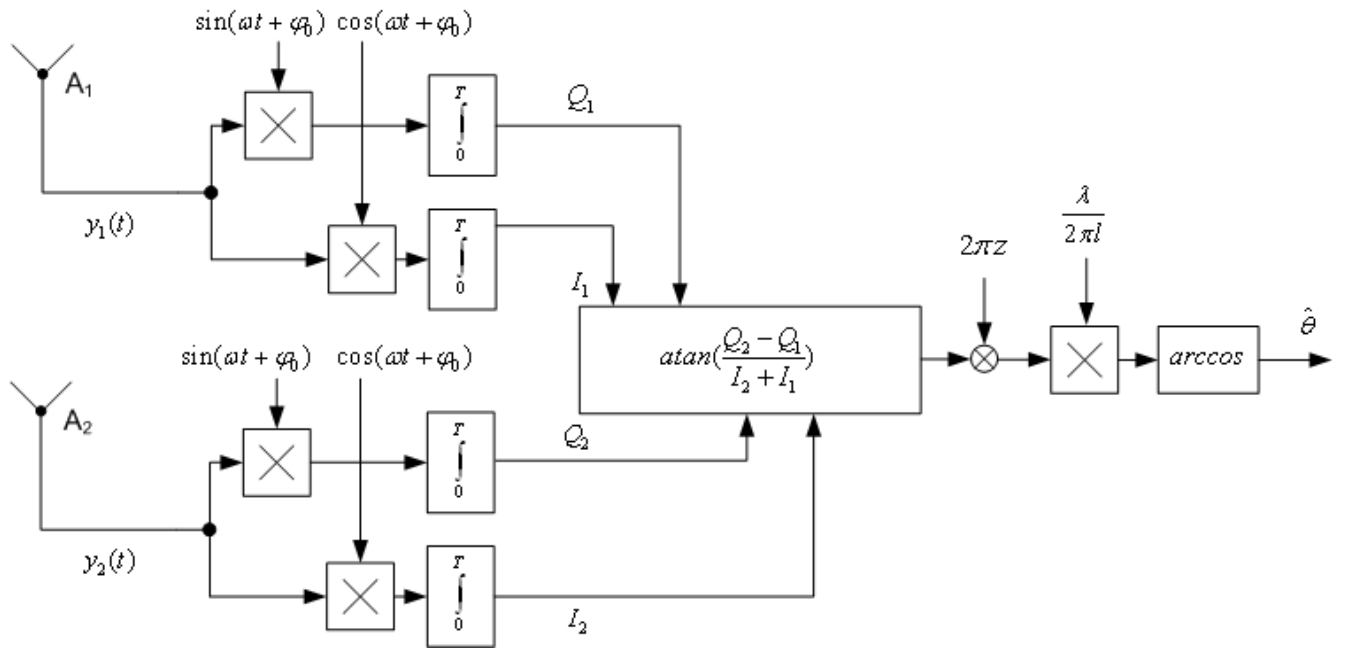


Рис. 3.1. Функциональная схема оценивания угла прихода по алгоритму (3.14)

полезным участие при вычислении оценки только сумм и разностей корреляционных компонент.

### 3.6 Потенциальная точность формируемой оценки

Для определения потенциальной точности полученного алгоритма найдем нижнюю границу дисперсии оценки по неравенству Рао-Крамера.

Дифференцируем первую частную производную логарифма отношения правдоподобия (3.9) повторно:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} &= \\
 &= -\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \cdot \frac{2A}{N_0} \cdot \left\{ -\sin(F(\theta)) \dot{I}_1(\varphi_0) - \cos(F(\theta)) \dot{Q}_1(\varphi_0) - \right. \\
 &\quad \left. - \sin(F(\theta)) \dot{I}_2(\varphi_0) + \cos(F(\theta)) \dot{Q}_2(\varphi_0) \right\} + \\
 &+ \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A}{N_0} \cdot \left\{ -\cos(F(\theta)) \dot{I}_1(\varphi_0) + \sin(F(\theta)) \dot{Q}_1(\varphi_0) - \right. \\
 &\quad \left. - \cos(F(\theta)) \dot{I}_2(\varphi_0) - \sin(F(\theta)) \dot{Q}_2(\varphi_0) \right\}. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Если оценка максимального правдоподобия несмещенная, то истинному

значению оцениваемого параметра соответствует максимум функции правдоподобия. В этом случае можно записать, основываясь на (3.11):

$$\begin{aligned} & - \sin(F(\theta))\dot{I}_1(\varphi_0) - \cos(F(\theta))\dot{Q}_1(\varphi_0) - \\ & - \sin(F(\theta))\dot{I}_2(\varphi_0) + \cos(F(\theta))\dot{Q}_2(\varphi_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Найдем границу Рао-Крамера, считая оценку максимального правдоподобия для данной задачи несмещенной. При этом выражение для второй производной логарифма отношения правдоподобия (3.15) преобразовывается к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} &= \\ &= \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A}{N_0} \cdot \left\{ -\cos(F(\theta))\dot{I}_1(\varphi_0) + \sin(F(\theta))\dot{Q}_1(\varphi_0) - \right. \\ & \quad \left. - \cos(F(\theta))\dot{I}_2(\varphi_0) - \sin(F(\theta))\dot{Q}_2(\varphi_0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

С учётом структуры принимаемых выборок переписываем выражение (3.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} &= \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A^2}{N_0} \times \\ & \times \left\{ - \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(F(\theta)) dt - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^T n_1(t) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(F(\theta)) dt + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) \sin(\omega t + \varphi_0) \sin(F(\theta)) dt + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T n_1(t) \cos(\omega t + \varphi_0) \sin(F(\theta)) dt - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta)) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(F(\theta)) dt - \\
& \quad - \int_0^T n_2(t) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(F(\theta)) dt - \\
& \quad - \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta)) \sin(\omega t + \varphi_0) \sin(F(\theta)) dt - \\
& \quad - \int_0^T n_2(t) \sin(\omega t + \varphi_0) \sin(F(\theta)) dt \left. \right\}. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

В выражении (3.18) случайными величинами являются корреляционные интегралы от аддитивных белых гауссовских шумов. Математическое ожидание этих интегралов равно нулю, можно записать:

$$\begin{aligned}
M \left[ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} \right] &= \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A^2}{N_0} \times \\
& \times \left\{ - \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(F(\theta)) dt + \right. \\
& \quad + \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) \sin(\omega t + \varphi_0) \sin(F(\theta)) dt - \\
& \quad - \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta)) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(F(\theta)) dt - \\
& \quad \left. - \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta)) \sin(\omega t + \varphi_0) \sin(F(\theta)) dt \right\}. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые и произведем тригонометрическое преобразование:

$$\begin{aligned}
M \left[ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} \right] &= \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A^2}{N_0} \times \\
& \times \left\{ \sin(F(\theta)) \int_0^T [\cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) \sin(\omega t + \varphi_0) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta)) \sin(\omega t + \varphi_0)] dt - \\
& \quad - \cos(F(\theta)) \int_0^T [\cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) \cos(\omega t + \varphi_0) + \\
& \quad \quad + \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta)) \cos(\omega t + \varphi_0)] dt \left. \right\}, \quad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M \left[ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} \right] &= \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A^2}{N_0} \times \\
& \times \left\{ \sin(F(\theta)) \int_0^T \sin(\omega t + \varphi_0) [\cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) - \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta))] dt - \right. \\
& \left. - \cos(F(\theta)) \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0) [\cos(\omega t + \varphi_0 + F(\theta)) + \cos(\omega t + \varphi_0 - F(\theta))] dt \right\}, \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M \left[ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} \right] &= 2 \cdot \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A^2}{N_0} \times \\
& \times \left\{ -\sin(F(\theta)) \int_0^T \sin(\omega t + \varphi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) \sin(F(\theta)) dt - \right. \\
& \quad \left. - \cos(F(\theta)) \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(F(\theta)) dt \right\}. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

В условиях задачи выражение (3.22) переходит в выражение:

$$\begin{aligned}
M \left[ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\theta))}{\partial \theta^2} \right] &= -2 \cdot \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{2A^2}{N_0} \left\{ \sin^2(F(\theta)) \frac{T}{2} + \cos^2(F(\theta)) \frac{T}{2} \right\} = \\
& = -\frac{2A^2 T}{N_0} \cdot \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2 = -4q \cdot \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

где  $q = \frac{E}{N_0} = \frac{A^2 T}{2N_0}$  - отношение сигнал/шум.

Информация Фишера:

$$I(\theta) = 4q \cdot \left( \frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \right)^2. \quad (3.24)$$



Дисперсия оценки угла прихода сигнала по полученному алгоритму, согласно неравенству Рао-Крамера:

$$D[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{I(\theta)} = \frac{\lambda^2}{4q(\pi l)^2 \sin^2(\theta)}. \quad (3.25)$$

Сравнивая границу Рао-Крамера (3.25) для полученного алгоритма оценивания при известной базовой фазе  $\varphi_0$  и границу Рао-Крамера (2.22) для оценки угла прихода по радиоинтерферометрическому методу при достижении потенциальной точности измерения разности фаз, приходим к выводу, что они совпадают. Таким образом, знание начальной фазы в опорной точке не влияет на потенциальную точность оценивания угла прихода сигнала. Что, с учетом свойств оценок максимального правдоподобия, означает сближение величин дисперсии оценки по каждому методу при увеличении отношения с/ш.

При малых отношениях сигнал/шум алгоритм оценивания угла прихода сигнала при известной начальной фазе в базовой точке может давать лучшую точность оценок, так как обладает дополнительной информацией. Наличие и величину выигрыша могут определить анализ работы алгоритма и статистическое моделирование.

### 3.7 Анализ составляющих оценки

Вернемся к выражению (3.12) и разобьем входящие в него корреляционные интегралы, рассматривая их как случайные величины, на составляющие. Для этого воспользуемся описанием синфазных и квадратурных корреляционных интегралов параграфа 1.4 (с. 12). В условиях поставленной задачи шумовые составляющие зависят только от значения спектральной плотности шума в принятых реализациях, а для математических ожиданий компонент действует геометрическая интерпретация комплексного сигнала.

Данный алгоритм, в отличие от радиоинтерферометрического метода, требует знание базовой фазы  $\varphi_0$ . Для возможности учесть изменения, происходящие в алгоритме при ошибке в определении начальной фазы базовой точки,

введем разность между  $\varphi_0$  и начальной фазой, используемой в колебаниях корреляционных интегралов:

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - \varphi_{0,ок} \quad (3.26)$$

Тогда для  $tg(F(\hat{\theta}))$  можно записать:

$$tg(F(\hat{\theta})) = \frac{-A\sin(\Delta\varphi_0 - F) + n_{Q2} + A\sin(\Delta\varphi_0 + F) - n_{Q1}}{A\cos(\Delta\varphi_0 - F) + n_{I2} + A\cos(\Delta\varphi_0 + F) + n_{I1}}, \quad (3.27)$$

где  $F = F(\theta) = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ .

Проводим тригонометрические преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} tg(F(\hat{\theta})) &= \frac{2A\cos(\Delta\varphi_0)\sin(F) + n_{Q2} - n_{Q1}}{2A\cos(\Delta\varphi_0)\cos(F) + n_{I2} + n_{I1}} = \\ &= \frac{2A\cos(\Delta\varphi_0)\sin(F)}{2A\cos(\Delta\varphi_0)\cos(F) + n_{I2} + n_{I1}} + \frac{n_{Q2} - n_{Q1}}{2A\cos(\Delta\varphi_0)\cos(F) + n_{I2} + n_{I1}}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $n_{Q2, Q1, I2, I1}$  – флуктуационные составляющие корреляционных компонент.

В случае точно известной начальной фазы, то есть  $\Delta\varphi_0 = 0$  (как это предполагалось для алгоритма данной главы), выражение (3.28) переходит в:

$$tg(F(\hat{\theta})) = \frac{2A\sin(F)}{2A\cos(F) + n_{I2} + n_{I1}} + \frac{n_{Q2} - n_{Q1}}{2A\cos(F) + n_{I2} + n_{I1}}, \quad (3.29)$$

которое не зависит от начальной фазы базовой точки в принятых реализациях.

Из полученного выражения следует вывод: средний квадрат ошибки оценивания  $F(\hat{\theta})$  является периодической функцией  $F(\theta)$ . При приближении  $F(\theta) \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi z, z \in \mathbb{Z}$  ошибка оценивания  $tg(F(\hat{\theta}))$  стремится к бесконечности – оценка тангенса не уходит на бесконечность, а ограничивается некоторым конечным числом. Тем не менее, это не означает стремление к бесконечности ошибки определения  $F(\hat{\theta})$ , так как тангенс является нелинейной функцией.

Как видно из полученного выражения, под действием шумовой составляющей может произойти смена знака оценки  $tg(F(\hat{\theta}))$ , что эквивалентно прибавлению к  $F(\hat{\theta})$  величины  $\pi$ . Данное явление можно трактовать как внесение шумовой неоднозначности, подобной рассмотренной для радиоинтерферометрического алгоритма.

Таким образом, для полученного алгоритма можно выделить основную и дополнительную шумовую неоднозначности.

### 3.8 Переход к алгоритму, не учитывающему базовую фазу

Рассмотрим случай, когда в алгоритме (3.14) используются не корреляционные компоненты  $\dot{I}_1(\varphi_0), \dot{I}_2(\varphi_0), \dot{Q}_1(\varphi_0), \dot{Q}_2(\varphi_0)$ , а компоненты не учитывающие начальную фазу в базовой точке:

$$I_1 = \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt; \quad (3.30)$$

$$I_2 = \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt; \quad (3.31)$$

$$Q_1 = \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt; \quad (3.32)$$

$$Q_2 = \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt. \quad (3.33)$$

В этом случае:

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - 0 = \varphi_0, \quad (3.34)$$

выражение (3.28) переходит в:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(F(\hat{\theta})) &= \\ &= \frac{2A \cos(\varphi_0) \sin(F)}{2A \cos(\varphi_0) \cos(F) + n_{I2} + n_{I1}} + \frac{n_{Q2} - n_{Q1}}{2A \cos(\varphi_0) \cos(F) + n_{I2} + n_{I1}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

а алгоритм оптимального оценивания угла прихода сигнала при известной начальной фазе в базовой точке (3.14) переходит в некоторый алгоритм оценивания угла прихода при неизвестной начальной фазе:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arccos \left( \frac{\lambda}{\pi l} \cdot \operatorname{arctg} \frac{Q_2 - Q_1}{I_2 + I_1} + \pi z, z \in \mathbb{Z} \right) = \\ &= \arccos \left( \frac{\lambda}{\pi l} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt - \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt}{\int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt + \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt} + \pi z, z \in \mathbb{Z} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Проведем анализ работоспособности алгоритма (3.36), основываясь на выражении (3.35). При  $N_0 \rightarrow 0$  шумовые составляющие так же стремятся к нулю, выражение переходит в:

$$tg(F(\hat{\theta})) = \frac{2A\cos(\varphi_0)\sin(F)}{2A\cos(\varphi_0)\cos(F)} = \frac{\sin(F(\theta))}{\cos(F(\theta))} = tg(F(\theta)), N_0 = 0, \forall \varphi_0, \quad (3.37)$$

то есть в этом случае оценка оказывается несмещенной.

При наличии шумовых составляющих характеристики алгоритма зависят от выпавшего в принятой реализации значения  $\varphi_0$ . Характеристики ухудшаются при уменьшении  $\cos(\varphi_0)$ . Можно ввести эквивалентную амплитуду сигнала

$$A_{cos} = A \cdot \cos(\varphi_0) \quad (3.38)$$

и эквивалентное отношение сигнал/шум

$$q_{cos} = q \cdot \cos^2(\varphi_0), \quad (3.39)$$

тогда алгоритм (3.36) ведет себя как исходный (3.14) с эквивалентными параметрами.

Помимо данных эффектов в алгоритме существует описанные выше периодическая зависимость ошибки от  $F(\theta)$  и возможность возникновения шумовой неоднозначности.

### 3.9 Моделирование работы алгоритма

Проведем компьютерное моделирование работы полученных алгоритмов (3.14), (3.36). Аналогично параграфу 2.5 исследуем выборочный средний квадрат ошибки оценивания, его связь с границей Рао-Крамера при разных отношениях сигнал/шум, а также смещенность оценки.

Для алгоритма (3.14) отсутствует базовая дополнительная неоднозначность. Алгоритм (3.36) совпадает с (3.14) при эквивалентном отношении сигнал шум, поэтому для него также отсутствует базовая дополнительная неоднозначность.

Обозначим, как и в параграфе 2.5:  $F = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ ,  $\hat{F} = \frac{\pi l \cos(\hat{\theta})}{\lambda}$ .

Методика проведения испытаний аналогична приведенной в параграфе 2.5.

Исследования проводим для двух вариантов исключения неоднозначностей:

1. при исключении только основной неоднозначности;
2. при полном исключении неоднозначности.

### 3.9.1 Моделирование при исключении только основной неоднозначности

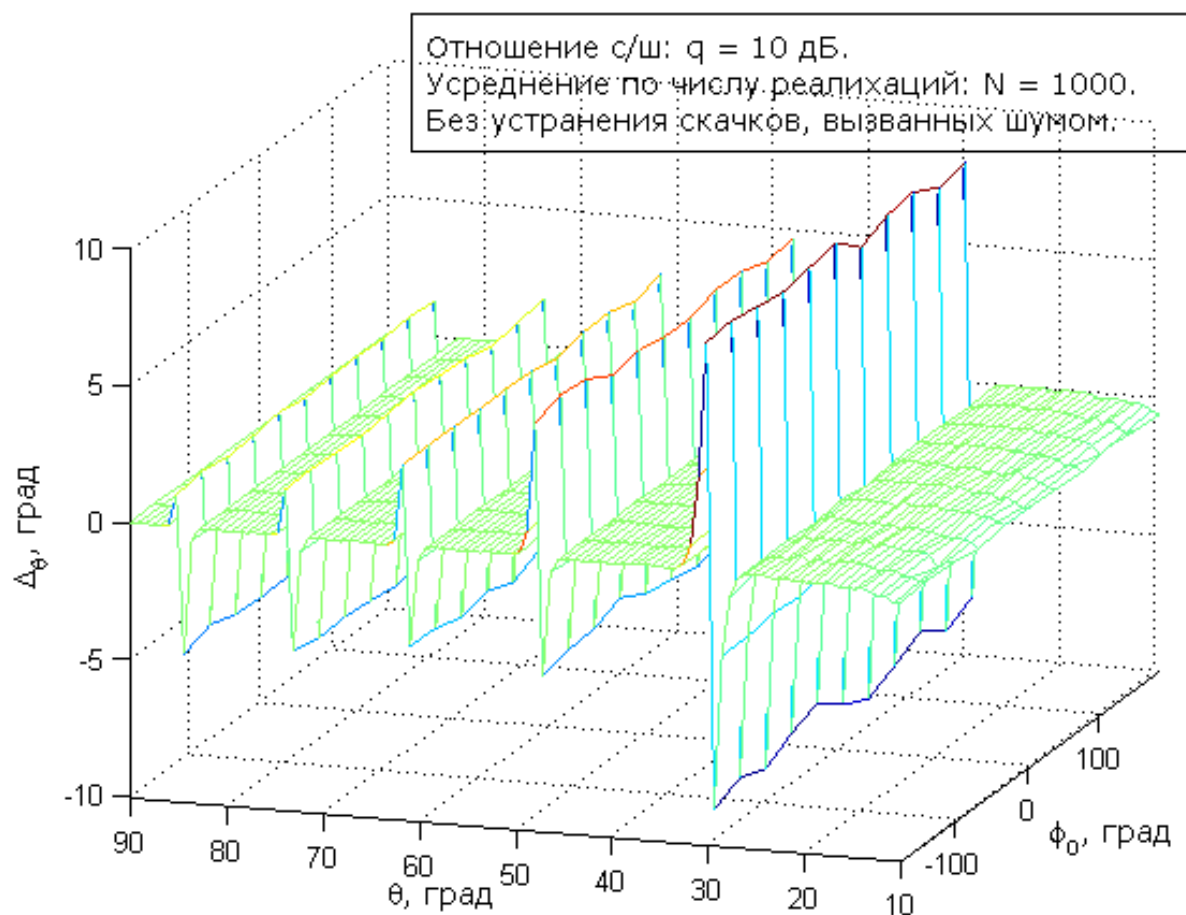
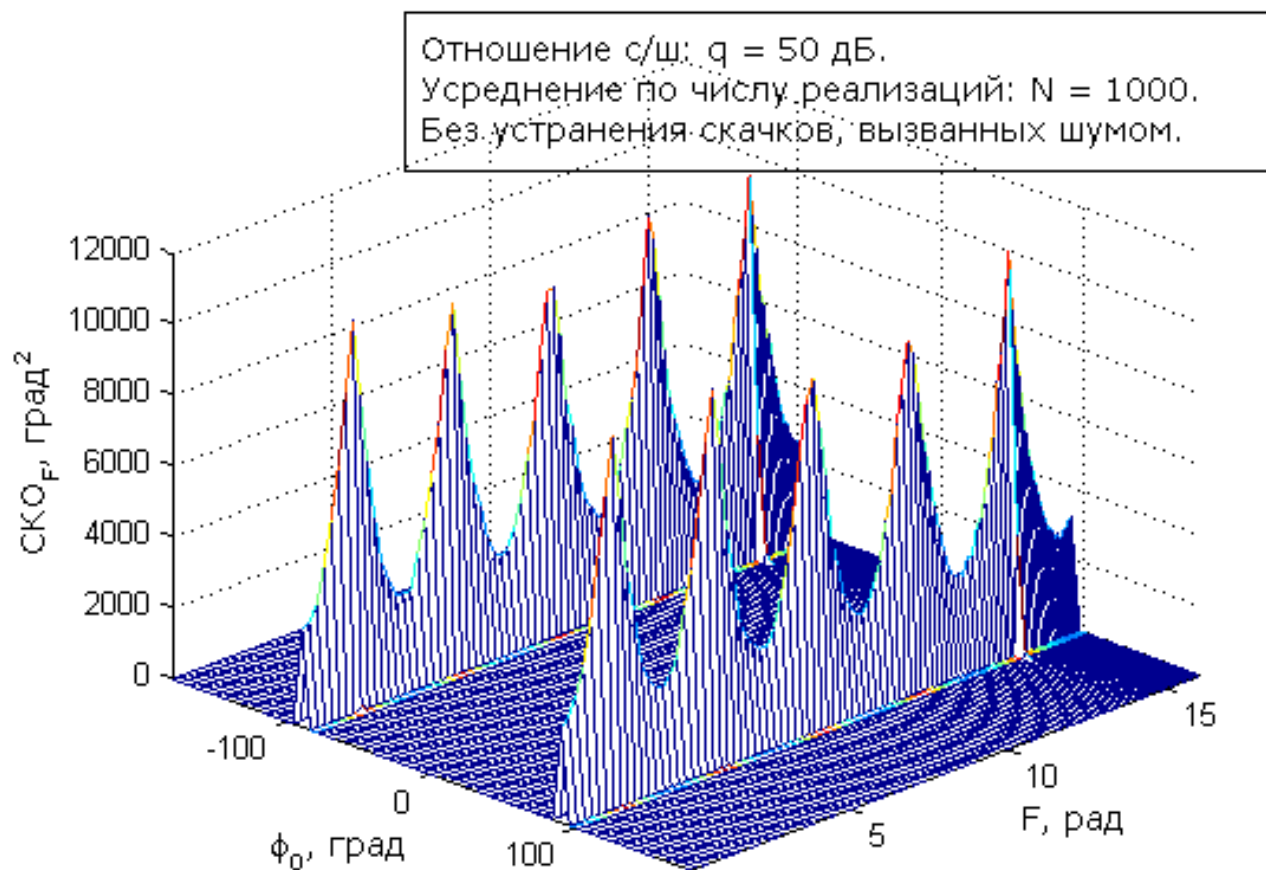


Рис. 3.2. Поверхность смещения при устранении только основной неоднозначности для алгоритма (3.14). Результат моделирования.

Поверхность смещения для алгоритма (3.14) при устранении основной неоднозначности приведена на рис. 3.2. Отсутствует зависимость от базовой фазы, но наблюдается наличие смещения при некоторых углах прихода. Эффект объясняется воздействием шумовой неоднозначности – это и есть периодическая ошибка, вызванная воздействием шума и описанная в параграфе 3.7 (с. 57).



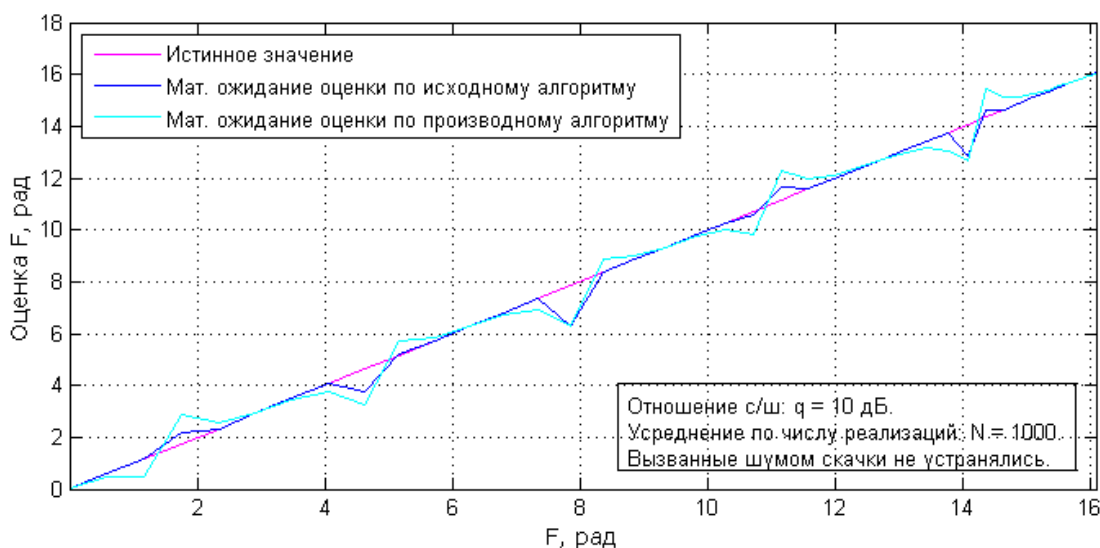
**Рис. 3.3.** Поверхность выборочного среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  при устранении только основной неоднозначности для алгоритма (3.36). Результат моделирования.

Поверхность выборочного среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  для алгоритма (3.36) при устранении основной неоднозначности приведена на рис. 3.3. К возрастанию среднего квадрата ошибки при определенных углах прихода, как это получено для алгоритма (3.14), добавилось его увеличение при приближении  $\varphi_0$  к  $\pm 90^\circ$ . Этот эффект объясняется стремлением эквивалентного отношения

сигнал/шум в этих точках к нулю.

Для строгого сравнения с радиоинтерферометрическим методом при неизвестной базовой фазе необходимо рассматривать срезы поверхностей показателей, соответствующие выпавшему значению  $\varphi_0$ .

Для возможности более простого сравнения алгоритма (3.36) с радиоинтерферометрическим методом при фиксированной базовой фазе, усредним его смещение и дисперсию ошибки оценки по равномерно распределенной в интервале  $[-\pi; \pi]$  базовой фазе. Так как поверхности характеристик алгоритма (3.14) не зависят от  $\varphi_0$ , то для его получим общие усредненные характеристики, которые будут совпадать со срезами при конкретных  $\varphi_0$ . Для алгоритма (3.36) это будут усредненные параметры, конкретные срезы от которых будут отличаться.



**Рис. 3.4.** Выборочная  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

На рис. 3.4 представлена зависимость оценки  $\hat{F}$  от истинного значения  $F$  при усреднении по  $\varphi_0$ . Как видим, усреднение по базовой фазе не позволило исключить смещенность оценки при определенных направлениях угла прихода сигнала.

На рисунках 3.5, 3.6 представлены оценки выборочные средние квадраты ошибки  $\hat{\theta}$  при различных отношениях сигнал/шум. Из графиков видно, что при отсутствии исключения дополнительных неопределенностей средний квадрат

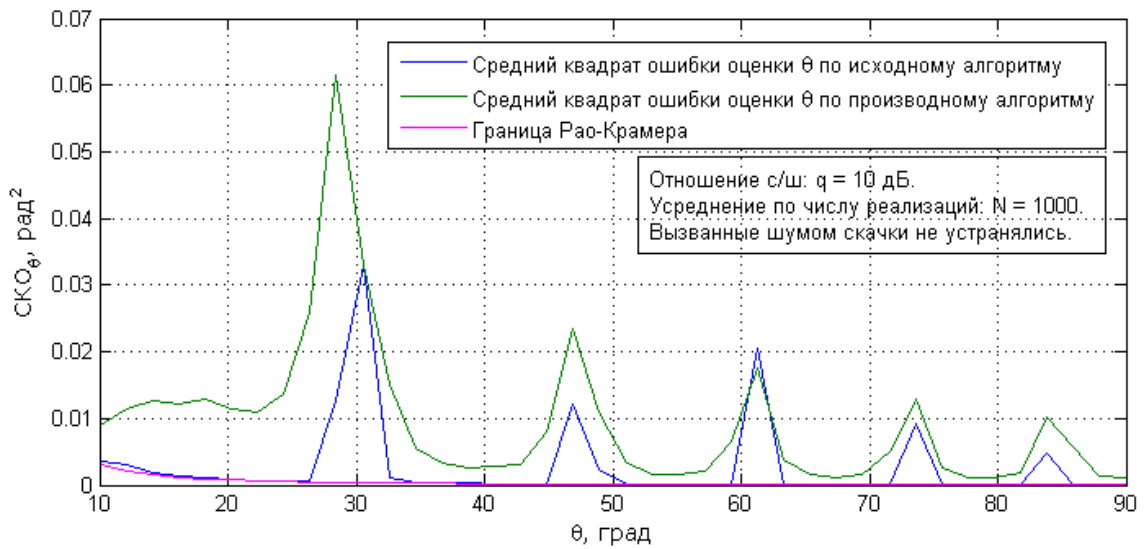


Рис. 3.5. Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

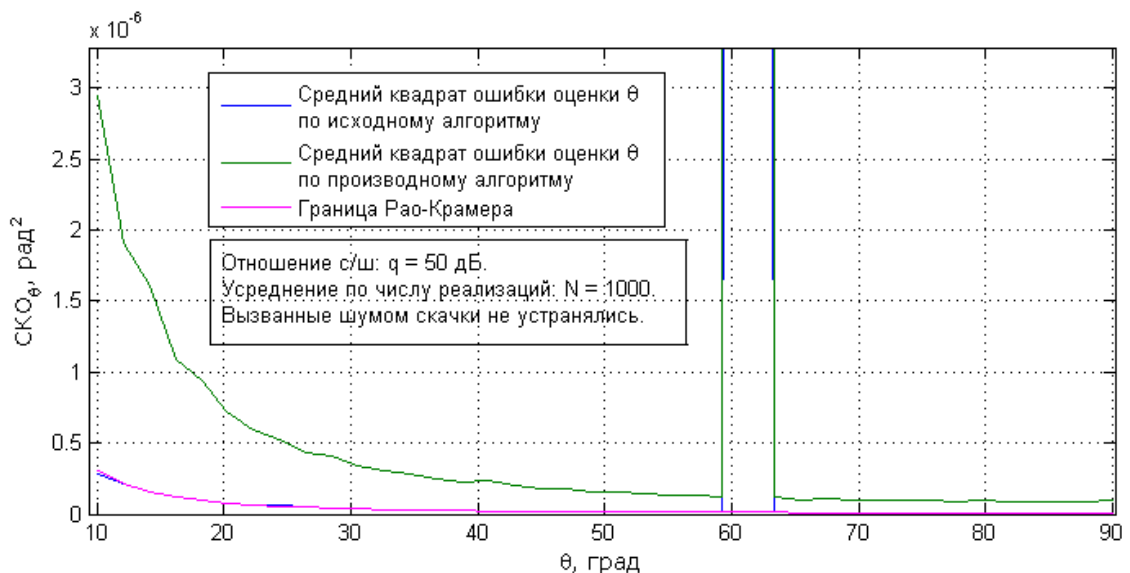
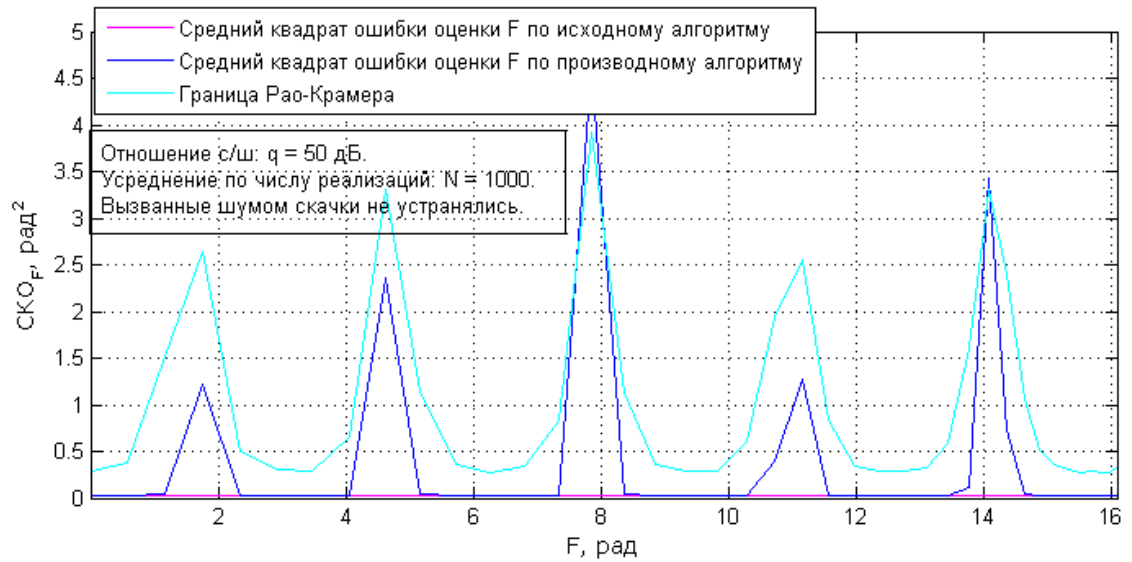


Рис. 3.6. Выборочные средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

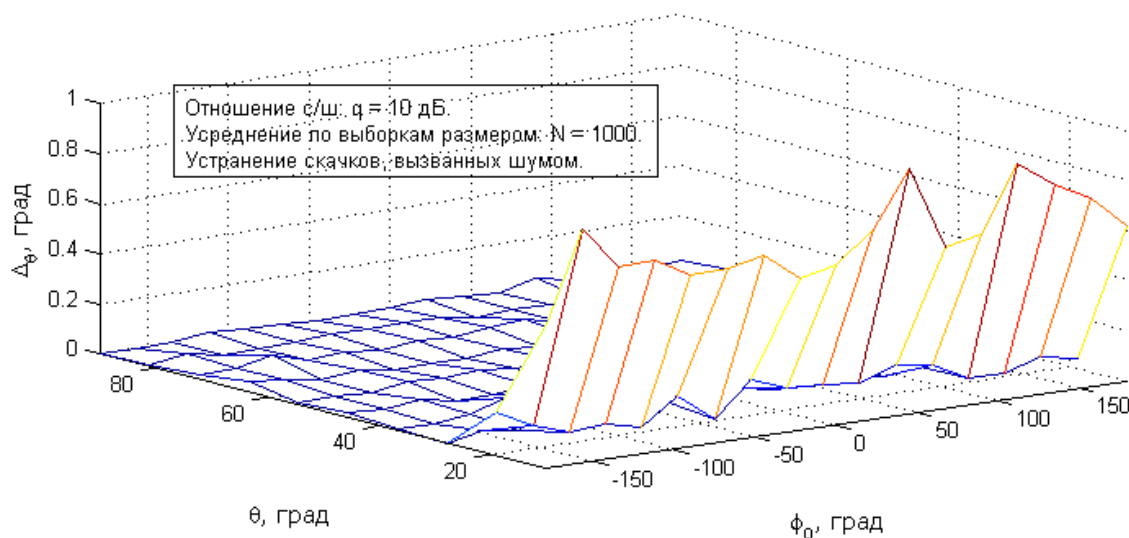




**Рис. 3.7.** Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

ошибки оценки значительно превышает потенциальную. На рис. 3.7 представлена зависимость среднего квадрата ошибки как функции истинного значения  $F$ .

### 3.9.2 Моделирование при полном исключении неоднозначности



**Рис. 3.8.** Поверхность смещения при полном исключении неоднозначности (3.14).  
Результат моделирования.

Поверхность смещения для алгоритма (3.14) при полном устранении неоднозначности приведена на рис. 3.8. Из сравнения с рис. 3.2 приходим к выводу, что зависимость от угла прихода исчезла. Следовательно, аномальные подъемы были вызваны шумовой неоднозначностью, как это и было предсказано в параграфе 3.7 (с. 57). Остался аномальный подъем при пологих углах прихода, который требует дополнительных исследований и, видимо, вызван недостаточным для этой области объемом статистики.

Поверхность среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  для алгоритма (3.36) при полном устранении неоднозначности приведена на рис. 3.9. Зависимость от угла прихода исчезла. Отчетливо виден рост СКО при приближении к нулям косинуса базовой фазы – это прямое проявление падения эквивалентного отношения сигнал/шум.

На рисунках 3.10, 3.11 представлены выборочные средние квадраты ошибки  $\hat{\theta}$  при различных отношениях сигнал/шум. Как видим, с увеличением отношения сигнал/шум средний квадрат ошибки оценки стремится к границе Рао-Крамера.

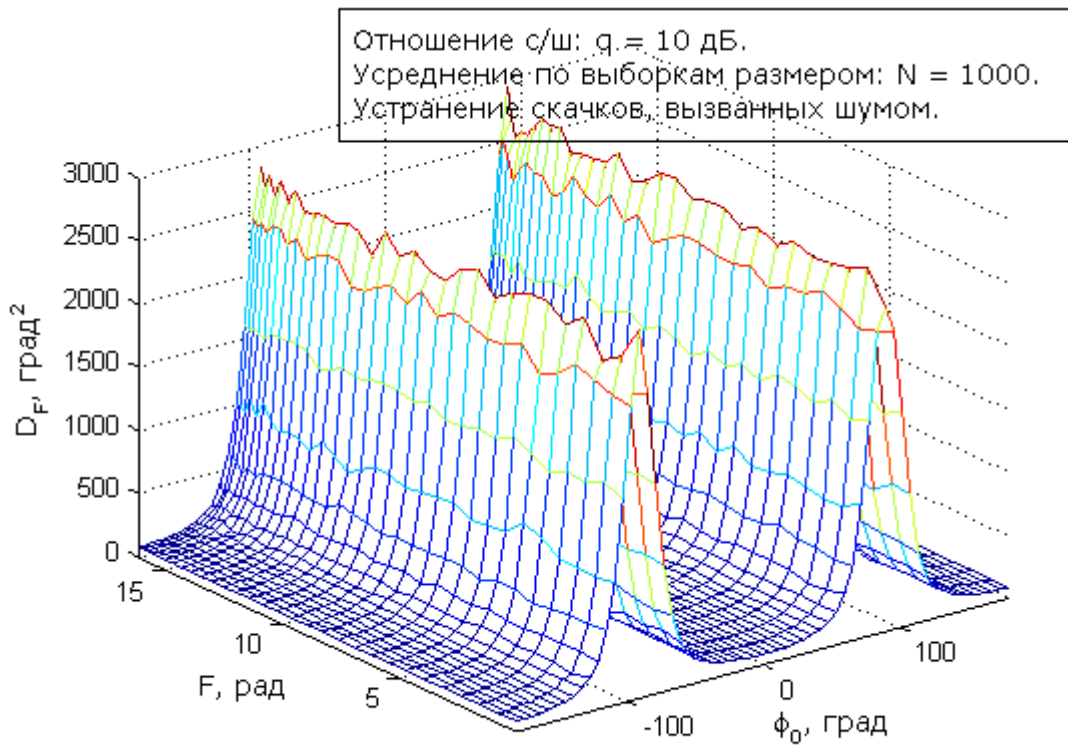


Рис. 3.9. Поверхность среднего квадрата ошибки  $\hat{F}$  при полном устранении неоднозначности для алгоритма (3.36). Результат моделирования.

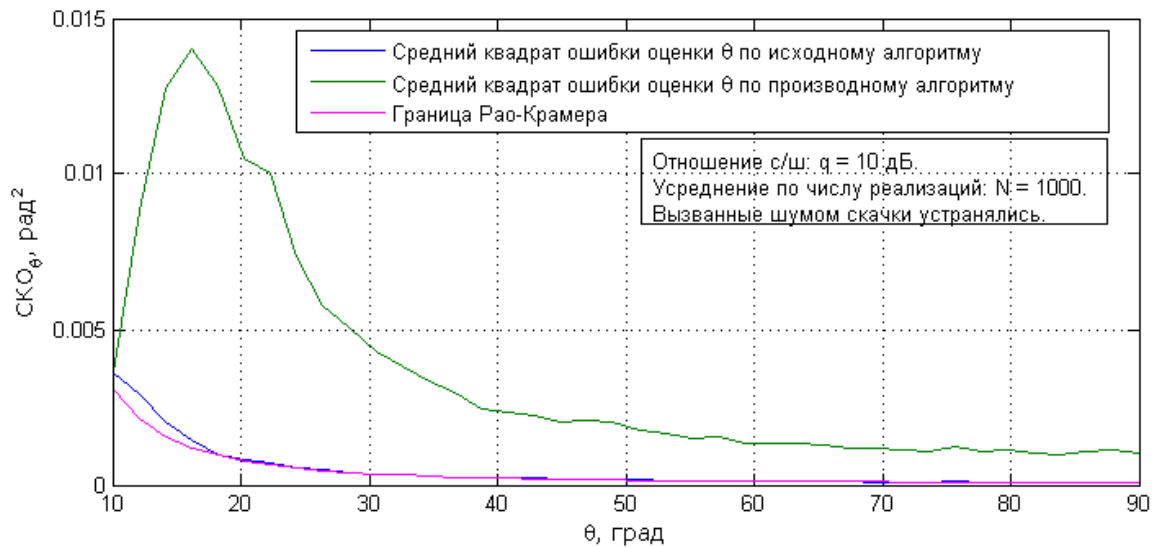
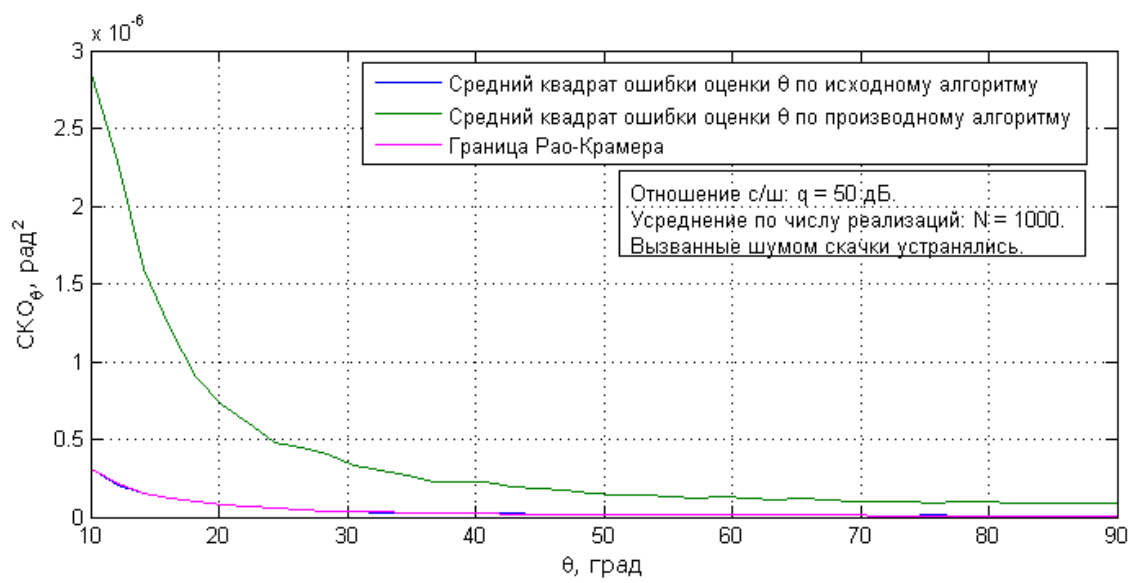


Рис. 3.10. Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и полном исключении неоднозначности. Результат моделирования.



**Рис. 3.11.** Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и полном исключении неоднозначности. Результат моделирования.

### 3.10 Выводы

Потенциальная точность оценки угла прихода сигнала при известной базовой фазе совпадает с потенциальной точностью радиоинтерферометрического метода.

Возможно использование полученного алгоритма с формальной подстановкой нулевой базовой фазы – алгоритм (3.36). При этом, получаемый алгоритм при отсутствии шума в выборках даёт несмещенную оценку. При наличии шума алгоритм эквивалентен исходному при эквивалентном отношении сигнал/шум (3.39), зависящем от выпавшего значения базовой фазы. Однако, это приводит к уменьшению, вплоть до нуля при  $\varphi_0 = \pm 90^\circ$ , эквивалентного отношения сигнал/шум по сравнению с исходным.

При использовании алгоритма (3.36) и возможности проведения серии измерений, можно предложить случайным образом менять начальную фазу опорных колебаний, формировать соответствующие оценки, а затем брать среднеарифметическое набранной статистики. Этим можно добиться усреднения характеристик по базовой фазе и избежать аномальных итоговых оценок.

Синтезированные алгоритмы обладают недостатком: при определенных углах прихода (соответствующих тождеству  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \approx \frac{\pi}{2} + \pi \xi, \xi \in \mathbb{Z}$ ) повышается вероятность возникновения шумовой неоднозначности. Если шумовая неоднозначность не устраняется, то приближение к этим областям приводит к увеличению среднего квадрата ошибки оценивания.

При полном устранении неоднозначности средний квадрат ошибки оценки, получаемой по исходному алгоритму (3.14), стремится к потенциальной дисперсии при увеличении отношения сигнал/шум.

## 4 Алгоритм оптимального оценивания угла прихода сигнала при неизвестной базовой фазе

### 4.1 Постановка задачи

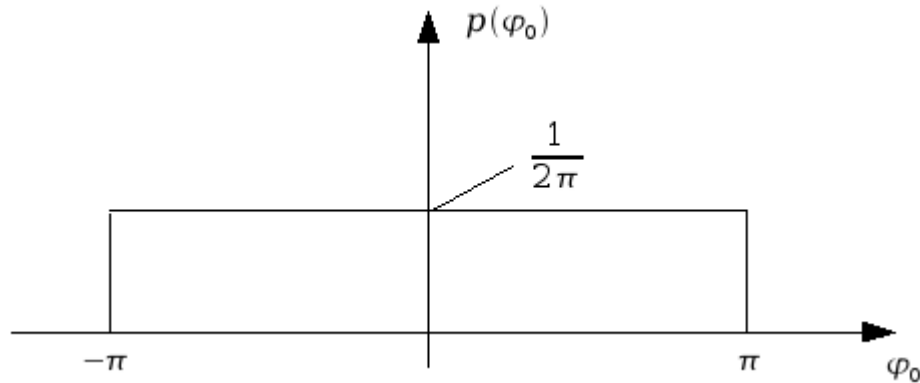


Рис. 4.1. Закон распределения начальной фазы в базовой точке

В двух точках базовой линии (тт.  $A_1$  и  $A_2$ , рис. 2.1), разнесенных на расстояние  $l$ , производится прием сигнала от одного источника. Расстояние до источника достаточно велико, приходящую волну можно считать плоской, падающей под углом  $\theta$  к базовой линии. *Базовой точкой* назовем точку  $O$ , являющуюся центром антенны. Точка  $O$  лежит на базовой линии и равноудалена от точек приема  $A_1$  и  $A_2$

Априорно известно:

- Структура сигнала - гармоническое колебание с известными частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ .
- Длина волны известна -  $\lambda$ .
- В базовой точке сигналу соответствует начальная фаза  $\varphi_0$ , такая что:

$$S_0(t, A, \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \in [0; T]. \quad (4.1)$$

Назовем  $\varphi_0$  *базовой фазой*. Известен закон распределения  $\varphi_0$  – равномерное распределение от  $-\pi$  до  $\pi$  (рис. 4.1).

- Расстояние  $l$ , структура сигналов в точках  $A_1$  и  $A_2$ :

$$S_1(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right), \quad t \in [0; T]; \quad (4.2)$$

$$S_2(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right), \quad t \in [0; T]. \quad (4.3)$$

В дальнейшем для наглядности выражений опустим обозначения известных параметров:  $S_1(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) \rightarrow S_1(t, \varphi_0, \theta)$ ,  $S_2(t, \varphi_0, \theta; l, \lambda, A) \rightarrow S_2(t, \varphi_0, \theta)$ .

- Сигналы принимаются на фоне независимых АБШ  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  с односторонними спектральными плотностями  $N_o$ .
- Прием производится на временном интервале с известной длительностью  $T$ .
- Период наблюдения  $T$  либо кратен периоду колебаний, либо многократно превышает его.
- Происходит разрешение фазовой неоднозначности некоторым сторонним методом.

Апостериорными данными являются принятые реализации:

$$y_1(t) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) + n_1(t) = S_1(t, \varphi_0, \theta) + n_1(t), \quad t \in [0; T]; \quad (4.4)$$

$$y_2(t) = A \cos \left( \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) + n_2(t) = S_2(t, \varphi_0, \theta) + n_2(t), \quad t \in [0; T]. \quad (4.5)$$

Требуется произвести оптимальную оценку угла прихода сигнала  $\theta$ . Под оптимальной оценкой понимаем оценку, при которой достигается максимум функции правдоподобия.

## 4.2 План решения задачи

Получить несмещенную оценку с минимальной дисперсией при отсутствии априорной плотности вероятности распределения искомого параметра при большом отношении сигнал/шум позволяет метод максимального правдоподобия (пар. 1.1, с. 6; пар. 1.2, с. 9). При этом он максимизирует функцию правдоподобия.

В решении задачи можно выделить следующие шаги:

1. Составить отношение правдоподобия основываясь на параграфе 1.1.
2. При текущей постановке задачи присутствует неинформативный параметр – базовая начальная фаза сигнала  $\varphi_0$ . Необходимо произвести исключение неинформативного параметра по методу, указанному в параграфе 1.1.
3. Продифференцировать полученное после исключения базовой начальной фазы отношение правдоподобия по углу  $\theta$ .
4. Приравнять результат дифференцирования нулю и найти корни полученного уравнения, соответствующие максимуму функции правдоподобия.
5. Найти нижний порог дисперсии по неравенству Рао-Крамера.

## 4.3 Отношение правдоподобия

В исходных предпосылках к решению задачи указана независимость аддитивных БГШ выборок. Это условие хорошо согласуется с практикой, так как аналоговые части приемников являются основными источниками шума. Выборки получены с разных элементов, и как следствие, шумы образованы разными источниками. Для случая двух сигналов с независимыми АБГШ в параграфе 1.1 приведено выражение для отношения правдоподобия:

$$\rho(\theta, \varphi_0) = \exp\left[\frac{2}{N_0} \left\{ \int_0^T y_1(t) S_1(t, \varphi_0, \theta) dt + \int_0^T y_2(t) S_2(t, \varphi_0, \theta) dt - E \right\}\right]. \quad (4.6)$$



#### 4.4 Исключение неинформативного параметра

Начальная фаза в базовой точке не является параметром сигнала, несущим полезную информацию. Как указано в параграфе 1.1, для отношения правдоподобия аргумент распределения исключается так же, как и для простой плотности вероятности:

$$\tilde{\rho}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\varphi_0) \rho(\theta, \varphi_0) d\varphi_0. \quad (4.7)$$

Закон распределения начальной фазы в базовой точке задан априорно. Его конкретный вид – равномерный закон распределения от  $-\pi$  до  $\pi$  – наиболее часто встречается на практике, так как случайными являются начальная фаза излучателя и расстояние до излучателя.

В соответствии с (4.7) исключим  $\varphi_0$  из отношения правдоподобия (4.6):

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \exp\left[\frac{2}{N_0} \left\{ \int_0^T y_1(t) S_1(t, \varphi_0, \theta) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^T y_2(t) S_2(t, \varphi_0, \theta) dt - E \right\}\right] d\varphi_0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Рассмотрим отдельно корреляционные интегралы, для упрощения выкладок произведем замену:

$$\varphi_1(t) = \omega t + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}; \quad (4.9)$$

$$\varphi_2(t) = \omega t - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}. \quad (4.10)$$

Тогда подынтегральные выражения:

$$Ay_i(t) \cos(\varphi_i(t) + \varphi_0) = Ay_i(t) \cos(\varphi_i(t)) \cos(\varphi_0) - Ay_i(t) \sin(\varphi_i(t)) \sin(\varphi_0). \quad (4.11)$$

С учетом (4.11) корреляционные интегралы можно записать как:

$$\begin{aligned} \int_0^T Ay_i(t) \cos(\varphi_i(t) + \varphi_0) dt = A \cos(\varphi_0) \int_0^T y_i(t) \cos(\varphi_i(t)) dt - \\ - A \sin(\varphi_0) \int_0^T y_i(t) \sin(\varphi_i(t)) dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полученные интегралы по времени обозначим как:

$$\check{I}_1(\theta) = \int_0^T y_1(t) \cos \left( \omega t + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt; \quad (4.13)$$

$$\check{I}_2(\theta) = \int_0^T y_2(t) \cos \left( \omega t - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt; \quad (4.14)$$

$$\check{Q}_1(\theta) = \int_0^T y_1(t) \sin \left( \omega t + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt; \quad (4.15)$$

$$\check{Q}_2(\theta) = \int_0^T y_2(t) \sin \left( \omega t - \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt. \quad (4.16)$$

Воспользуемся соотношением  $E = A^2/2$ , перегруппируем слагаемые, тогда:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\theta) &= \exp\left(\frac{-A^2}{N_0}\right) \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\frac{2A}{N_0} \{ \cos(\varphi_0)(\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta)) - \sin(\varphi_0)(\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)) \}\right] d\varphi_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Второй множитель в выражении (4.17) по интегральному определению является модифицированной функцией Бесселя нулевого порядка:

$$\tilde{\rho}(\theta) = \exp\left(\frac{-A^2}{N_0}\right) \times I_0 \left[ \frac{2A}{N_0} \check{X}(\theta) \right], \quad (4.18)$$

где

$$\check{X}(\theta) = \sqrt{[\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta)]^2 + [\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)]^2}. \quad (4.19)$$

## 4.5 Дифференцирование логарифма отношения правдоподобия

Продифференцируем логарифм полученного отношения правдоподобия (4.18) по оцениваемому параметру, для чего запишем:

$$\ln(\tilde{\rho}(\theta)) = -\frac{A^2}{N_0} + \ln \left[ I_0 \left( \frac{A^2}{N_0} \check{X}(\theta) \right) \right]. \quad (4.20)$$

Амплитуда принимаемых сигналов и спектральная плотность АБГШ не зависят от искомого параметра  $\theta$ . Другими словами – угол прихода не является

энергетическим параметром (энергия сигнала не зависит от  $\theta$ ). Тогда частная производная первого слагаемого равна нулю, и при дифференцировании выражение принимает вид:

$$\frac{\partial \ln(\tilde{\rho}(\theta))}{\partial \theta} = \frac{\partial \ln \left[ I_0 \left( \frac{A^2}{N_0} \check{X}(\theta) \right) \right]}{\partial \theta}. \quad (4.21)$$

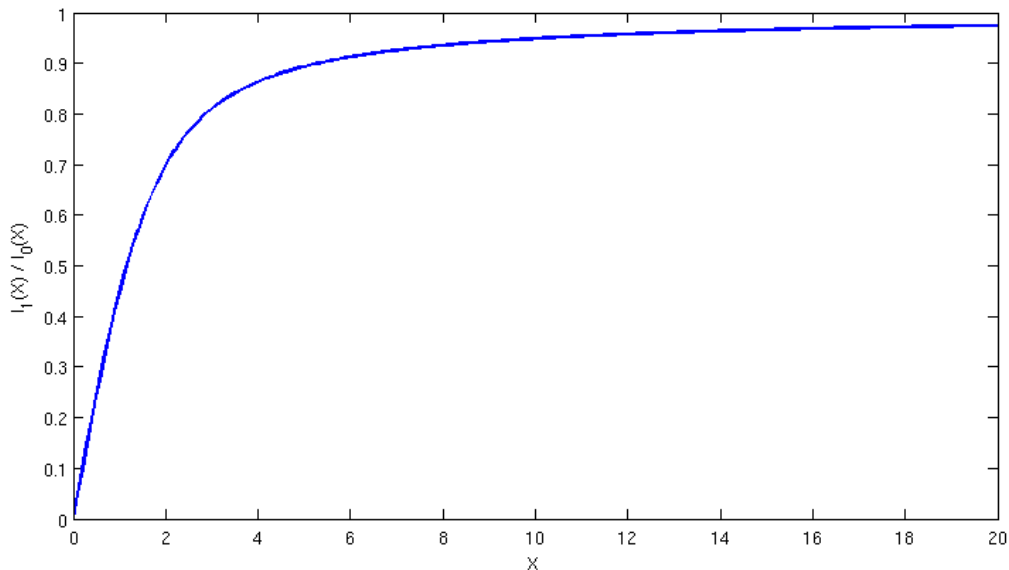
При дифференцировании функции Бесселя её порядок, по определению, возрастает на единицу:

$$\frac{\partial \ln \left[ I_0 \left( \frac{A^2}{N_0} \check{X}(\theta) \right) \right]}{\partial \theta} = \frac{2A}{N_0} \times \frac{I_1 \left[ \frac{2A}{N_0} \check{X}(\theta) \right]}{I_0 \left[ \frac{2A}{N_0} \check{X}(\theta) \right]} \times \frac{\partial \check{X}(\theta)}{\partial \theta}. \quad (4.22)$$

## 4.6 Экстремумы отношения правдоподобия

Приравняем результат дифференцирования логарифма отношения правдоподобия (4.22) нулю и найдем максимумы:

$$\left. \frac{\partial \ln(\tilde{\rho}(\theta))}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0 \implies \left. \frac{I_1 \left[ \frac{2A}{N_0} \check{X}(\theta) \right]}{I_0 \left[ \frac{2A}{N_0} \check{X}(\theta) \right]} \right|_{\hat{\theta}} \times \left. \frac{\partial \check{X}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0. \quad (4.23)$$



**Рис. 4.2.** График отношения модифицированных функций Бесселя.

Рассмотрим второй множитель в выражении (4.23):

$$\left. \frac{\partial \check{X}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0. \quad (4.24)$$

Согласно графику на рис. 4.2 отношение функций Бесселя положительно для любого отличного от нуля аргумента. Отсюда следует, что оценкой максимального правдоподобия является такая оценка параметра  $\theta$ , которая максимизирует  $\check{X}(\theta)$ , что с учетом положительности данного корня означает и максимизацию  $\check{X}(\theta)^2$ .

Раскрываем (4.24):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \check{X}(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{[\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta)]^2 + [\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)]^2}} \Big|_{\hat{\theta}} \times \\ &\quad \times \left. \frac{\partial([\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta)]^2 + [\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)]^2)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\check{X}(\theta)} \Big|_{\hat{\theta}} \times \left. \frac{\partial(\check{X}(\theta)^2)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0. \quad (4.25) \end{aligned}$$

При  $\check{X}(\theta) \rightarrow 0$  отношение функций Бесселя переходит в функцию  $\frac{2A}{N_0} \frac{\check{X}(\theta)}{2}$  и частично сокращается с первым множителем в (4.25), оставляя только независимый от  $\theta$  конечный множитель  $\frac{A}{2N_0}$ . Для первого же множителя в (4.25) это единственная экстремальная точка, на остальном множестве множитель положителен и конечен, и как следствие, не влияет на положение максимума отношения правдоподобия, а влияет только на его величину.

Сокращая положительные константы получаем:

$$\left. \frac{\partial([\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta)]^2 + [\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)]^2)}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0. \quad (4.26)$$

В итоге, после алгебраических преобразований имеем соответствие, полученное ранее из соображений о знаках множителей:

$$\left. \frac{\partial \ln(\tilde{\rho}(\theta))}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0 \iff \left. \frac{\partial \check{X}(\theta)^2}{\partial \theta} \right|_{\hat{\theta}} = 0. \quad (4.27)$$

Проведем геометрическую интерпретацию полученного результата. В случае отсутствия шумов комплексное число  $I + jQ$ , образованное синфазной и

квадратурной компонентами, имеет аргумент, равный разности полных фаз входного сигнала и опорного колебания, умноженной на минус единицу. При такой интерпретации  $\check{X}(\theta)$  - амплитуда вектора, являющегося суммой векторов  $\check{I}_1(\theta) + j\check{Q}_1(\theta)$  и  $\check{I}_2(\theta) + j\check{Q}_2(\theta)$ . При фиксированных амплитудах отдельных векторов, максимум амплитуды суммарного вектора достигается при их сонаправленности, то есть:

$$-\arctg 2(\check{I}_1(\theta), \check{Q}_1(\theta)) = -\arctg 2(\check{I}_1(\theta), \check{Q}_1(\theta)). \quad (4.28)$$

Что аналогично:

$$\begin{cases} \frac{\check{Q}_1(\theta)}{\check{I}_1(\theta)} = \frac{\check{Q}_2(\theta)}{\check{I}_2(\theta)}; \\ \text{sign}(\check{I}_1(\theta)) = \text{sign}(\check{I}_2(\theta)). \end{cases} \quad (4.29)$$

Получим уравнение (4.29) строго аналитически, для чего продифференцируем  $X^2(\theta)$  по  $\theta$  и приравняем результат нулю:

$$\frac{\partial [(\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta))^2 + (\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta))^2]}{\partial \theta} = 0, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi l \sin(\theta)}{\lambda} \cdot [2 \cdot (\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta)) \cdot (-\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)) + \\ + 2 \cdot (\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)) \cdot (\check{I}_1(\theta) - \check{I}_2(\theta))] = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Условие  $\sin(\hat{\theta}) = 0$  не может описывать алгоритм оценки в общем случае, а значит не связано с глобальным максимумом функции правдоподобия. Остается выражение в скобке:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\check{I}_1(\theta) + \check{I}_2(\theta)) \cdot (-\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)) + \\ + 2 \cdot (\check{Q}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)) \cdot (\check{I}_1(\theta) - \check{I}_2(\theta)) = 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_1(\theta)\check{Q}_2(\theta) + \check{Q}_2(\theta)\check{I}_2(\theta) - \check{I}_1(\theta)\check{Q}_1(\theta) - \check{I}_2(\theta)\check{Q}_1(\theta) + \\ + \check{Q}_1(\theta)\check{I}_1(\theta) + \check{Q}_2(\theta)\check{I}_1(\theta) - \check{Q}_1(\theta)\check{I}_2(\theta) - \check{Q}_2(\theta)\check{I}_2(\theta) = 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\check{I}_1(\theta)\check{Q}_2(\theta) - \check{I}_2(\theta)\check{Q}_1(\theta) = 0, \quad (4.34)$$

$$\frac{\check{Q}_1(\theta)}{\check{I}_1(\theta)} = \frac{\check{Q}_2(\theta)}{\check{I}_2(\theta)}. \quad (4.35)$$

Случай  $\text{sign}(\check{I}_1(\theta)) = -\text{sign}(\check{I}_2(\theta))$ ,  $\text{sign}(\check{Q}_1(\theta)) = -\text{sign}(\check{Q}_2(\theta))$  соответствует минимуму  $\check{X}(\theta)^2$ , а значит определяет минимум отношения правдоподобия. Таким образом, уравнение (4.35) следует дополнить условием равенства знаков, что выделит из множества решений корни, соответствующие максимуму функции правдоподобия. Подтвердили условие (4.29), полученное ранее из геометрических соображений.

Рассмотрим подробнее интегралы  $\check{I}_1(\theta)$ ,  $\check{I}_2(\theta)$ ,  $\check{Q}_1(\theta)$ ,  $\check{Q}_2(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \check{I}_1(\theta) &= \int_0^T y_1(t) \cos \left( \omega t + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt = \\ &= \cos(F) \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt - \sin(F) \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt = \\ &= \cos(F) I_1 - \sin(F) Q_1; \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \check{Q}_2(\theta) &= \int_0^T y_2(t) \sin \left( \omega t + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt = \\ &= \cos(F) \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt - \sin(F) \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt = \\ &= \cos(F) Q_2 - \sin(F) I_2; \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \check{I}_2(\theta) &= \int_0^T y_2(t) \cos \left( \omega t + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt = \\ &= \cos(F) \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt + \sin(F) \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt = \\ &= \cos(F) I_2 + \sin(F) Q_2; \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
\check{Q}_1(\theta) &= \int_0^T y_1(t) \sin \left( \omega t + \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \right) dt = \\
&= \cos(F) \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt + \sin(F) \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt = \\
&= \cos(F) Q_1 + \sin(F) I_1, \quad (4.39)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt, \\
I_2 &= \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt, \\
Q_1 &= \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt, \\
Q_2 &= \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt, \\
F &= F(\theta) = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{I}_1(\theta) \check{Q}_2(\theta) &= \\
&= \cos^2(F) I_1 Q_1 - \sin(F) \cos(F) Q_1 Q_2 - \cos(F) \sin(F) I_1 I_2 + \sin^2(F) Q_1 I_2, \quad (4.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\check{I}_2(\theta) \check{Q}_1(\theta) &= \\
&= \cos^2(F) I_2 Q_1 + \sin(F) \cos(F) Q_1 Q_2 + \cos(F) \sin(F) I_1 I_2 + \sin^2(F) I_1 Q_2. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Учитывая равенство этих произведений как условие нахождения оценки максимального правдоподобия, получаем:

$$\cos(2F(\hat{\theta})) I_1 Q_2 - \sin(2F(\hat{\theta})) Q_1 Q_2 - \sin(2F(\hat{\theta})) I_1 I_2 - \cos(2F(\hat{\theta})) Q_1 I_2 = 0 \Rightarrow \quad (4.42)$$

$$\Rightarrow \cos(2F(\hat{\theta})) (I_1 Q_2 - Q_1 I_2) = \sin(2F(\hat{\theta})) (Q_1 Q_2 + I_1 I_2) \Rightarrow \quad (4.43)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(2F(\hat{\theta})) = \frac{I_1 Q_2 - Q_1 I_2}{Q_1 Q_2 + I_1 I_2} \quad (4.44)$$

Используя обратные функции и устраняя фазовую неоднозначность, получаем:

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{I_1 Q_2 - Q_1 I_2}{Q_1 Q_2 + I_1 I_2} \right) + \pi z \right] \right), z \in \mathbb{Z} \quad (4.45)$$

Что с учетом введенных обозначений эквивалентно:

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} \times \left[ \arctg \left( \frac{\int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt - \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt}{\int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt + \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt} \right) + \pi z \right] \right), z \in \mathbb{Z} \quad (4.46)$$

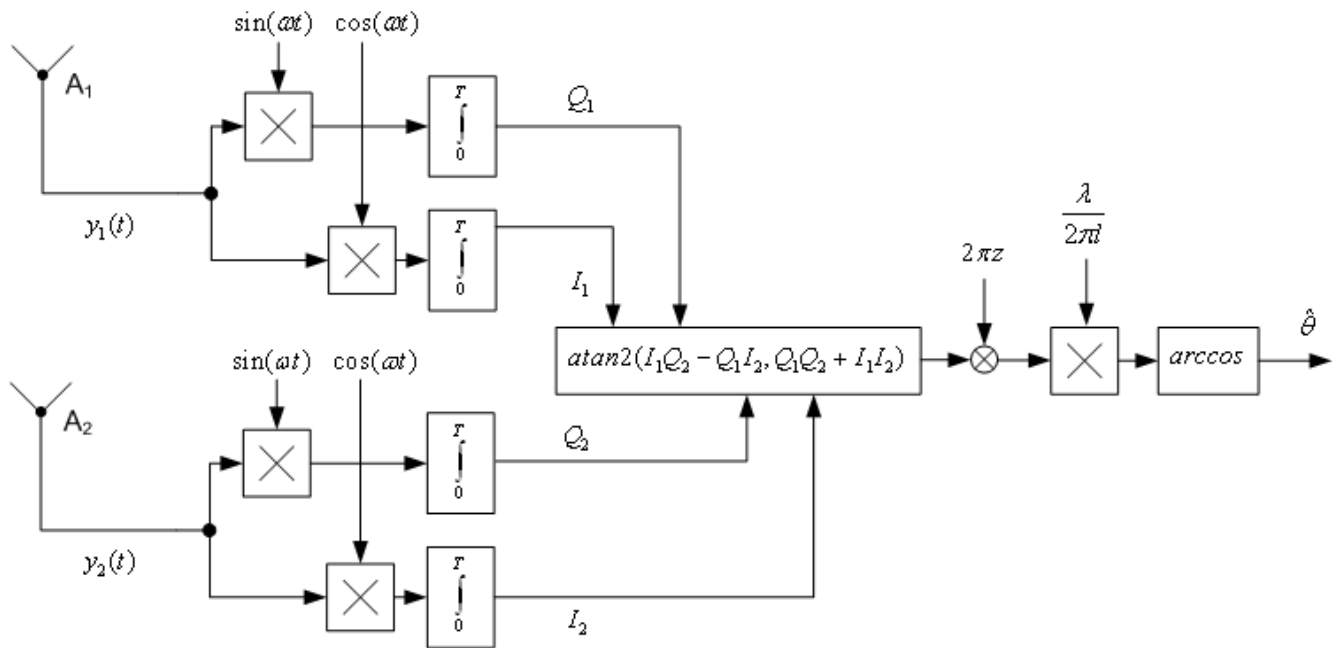


Рис. 4.3. Функциональная схема оценивания угла прихода по алгоритму (4.47)

Полученный алгоритм не зависит от начальной фазы сигнала в базовой точке и требует однократное разрешение фазовой неоднозначности, чем положительно выделяется по сравнению с радиоинтерферометрическим алгоритмом и алгоритмом с известной начальной фазой, а также позволяет использовать его в качестве углового дискриминатора. При этом он нуждается в больших вычислительных затратах: требуется произвести четыре перемножения и одно деление. Однако, операцию арктангенса требуется выполнить один раз.

Для увеличения дискрета фазовой неоднозначности можно воспользоваться функцией  $\text{atan2}$ :

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} [\text{atan2}(I_1Q_2 - Q_1I_2, Q_1Q_2 + I_1I_2) + 2\pi m] \right), m \in \mathbb{Z}. \quad (4.47)$$



Функциональная схема оценивания угла прихода по полученному алгоритму приведена на рис. 4.3.

## 4.7 Потенциальная точность формируемой оценки

В параграфе 3.6 была найдена граница Рао-Крамера дисперсии оценки угла прихода сигнала при известном логарифме отношения правдоподобия (3.5) в предположении несмещенности оценки максимального правдоподобия.

В качестве параметра условной плотности вероятности участвовала известная начальная фаза в базовой точке, при этом полученная граница Рао-Крамера оказалась независимой от её значения.

Статистическая постановка задачи нахождения границы Рао-Крамера для алгоритма оценивания угла прихода сигнала при неизвестной начальной фазе отличается от рассмотренной только вероятностным характером начальной фазы в базовой точке. В каждом эксперименте она является случайной величиной с известным законом распределения. Но если математическое ожидание второй производной условной плотности вероятности по оцениваемому параметру индифферентно известному значению начальной фазы, то оно также не зависит от случайно выпавшего значения — срез условной плотности вероятности не изменяется при "движении" вдоль оси начальной фазы. Следовательно, границы Рао-Крамера совпадают, то есть дисперсия оценки, формируемой по алгоритму оценивания угла прихода сигнала при неизвестной начальной фазе колебания базовой точки, подчиняется неравенству (3.25):

$$D[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{I(\theta)} = \frac{\lambda^2}{4q(\pi l)^2 \sin^2(\theta)}. \quad (4.48)$$

Таким образом, потенциальные точности радиоинтерферометрического алгоритма и алгоритмов, полученных по методу максимального правдоподобия, совпадают. В пределе, при больших отношениях сигнал/шум и полном устранении неоднозначностей, оценки, формируемые каждым алгоритмом, должны обладать одинаковыми дисперсиями.

## 4.8 Радиointерферометрический метод как геометрическая интерпретация

Покажем, что при  $N_0 \rightarrow 0$ , из условия (4.29) следует радиointерферометрический алгоритм оценивания угла прихода сигнала.

Компоненты  $\check{I}_1(\theta)$ ,  $\check{Q}_1(\theta)$  получены относительно корреляционных колебаний, имеющих начальную фазу  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ , а компоненты  $\check{I}_2(\theta)$  и  $\check{Q}_2(\theta)$  получены относительно корреляционных колебаний, имеющих начальную фазу  $-\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ . Из сравнения фазы корреляционных колебаний с известными структурами принимаемых сигналов можно сделать вывод, что сонаправленное состояние векторов соответствует их ориентации на угол  $-\varphi_0$ .

Для дальнейших рассуждений обозначим:

$$\mathfrak{F} = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} - 2\pi k, \quad \mathfrak{F} \in [-\pi, \pi], \quad (4.49)$$

где  $k$  известно из блока разрешения неоднозначности.

Формирование компонент  $\check{I}_1(\theta)$ ,  $\check{I}_2(\theta)$ ,  $\check{Q}_1(\theta)$ ,  $\check{Q}_2(\theta)$  напрямую в приемнике невозможно, так как для этого потребовалось бы знать оцениваемый параметр при формировании корреляционных колебаний. Введем компоненты относительно корреляционных колебаний  $\cos(\omega t)$ ,  $\sin(\omega t)$ :

$$I_1(\theta) = \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt; \quad (4.50)$$

$$I_2(\theta) = \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt; \quad (4.51)$$

$$Q_1(\theta) = \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt; \quad (4.52)$$

$$Q_2(\theta) = \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt. \quad (4.53)$$

Вносимый при этом сдвиг фазы корреляционных колебаний на  $\pm \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$  соответствует повороту компонент относительно прежнего сонаправленного состояния на угол  $\pm \mathfrak{F}$ . Получаемая при этом картина представлена на векторной

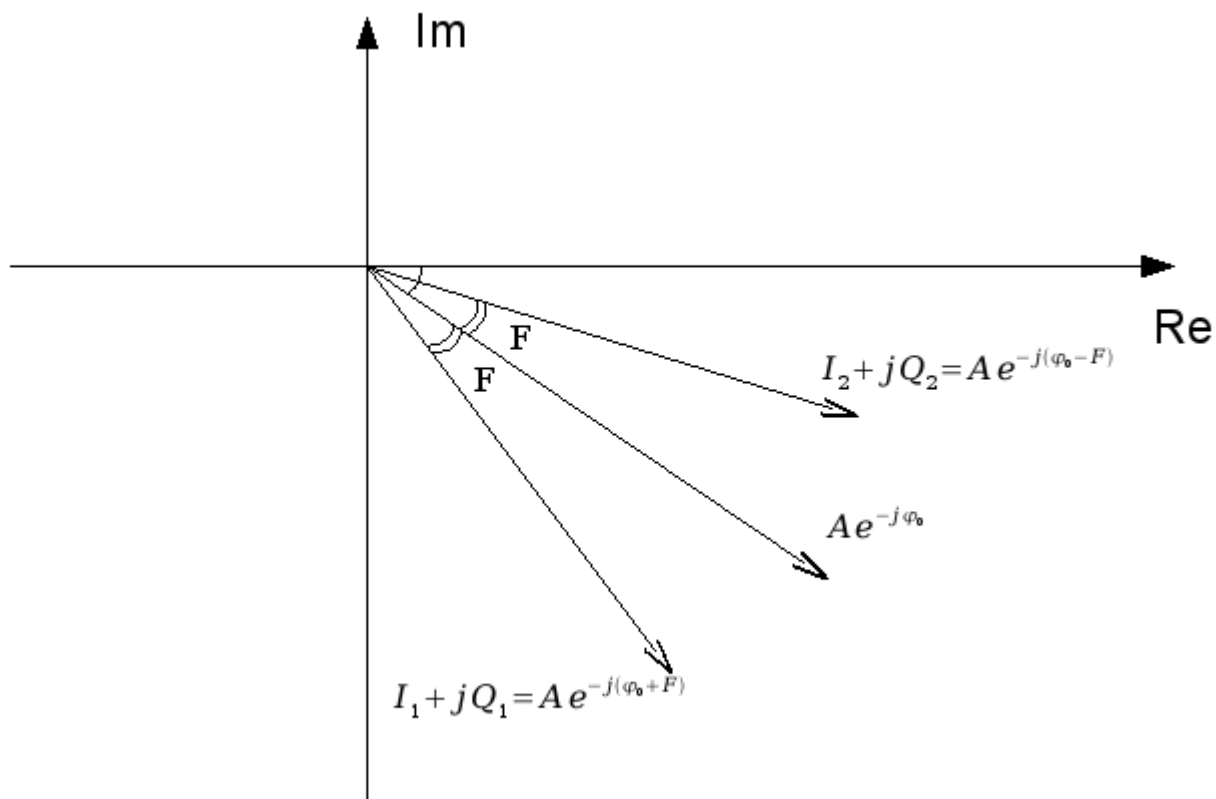


Рис. 4.4. Векторная диаграмма комплексных сигналов относительно ОГ вида  $\cos(\omega t)$ .

диаграмме на рис. 4.4, по которой легко записать выражение для угла  $\mathfrak{F}$ :

$$2\mathfrak{F} = -\arctg 2(I_1(\theta), Q_1(\theta)) - [-\arctg 2(I_2(\theta), Q_2(\theta))]. \quad (4.54)$$

В случае разрешения фазовой неоднозначности с точностью до  $\pi$ , то есть при  $\mathfrak{F} = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} - \pi n, n \in \mathbb{Z}$ :

$$2\mathfrak{F} = -\arctg \frac{Q_1(\theta)}{I_1(\theta)} - \left( -\arctg \frac{Q_2(\theta)}{I_2(\theta)} \right). \quad (4.55)$$

Из (4.55) выражаем оцениваемый параметр:

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} \left\{ \arctg \frac{\int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt}{\int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt} - \arctg \frac{\int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt}{\int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt} + \pi \xi \right\} \right), \xi \in \mathbb{Z}. \quad (4.56)$$

$$\hat{\theta} = \arccos \left( \frac{\lambda}{2\pi l} \left\{ \operatorname{atan2} \left( \int_0^T y_2(t) \sin(\omega t) dt, \int_0^T y_2(t) \cos(\omega t) dt \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{atan2} \left( \int_0^T y_1(t) \sin(\omega t) dt, \int_0^T y_1(t) \cos(\omega t) dt \right) + 2\pi\xi \right\} \right), \xi \in \mathbb{Z}. \quad (4.57)$$

Выражения (4.56), (4.57) представляют собой вышеизученный радиointерферометрический алгоритм.

## 4.9 Моделирование работы алгоритма

Проведем компьютерное моделирование работы полученного алгоритма (4.47). Исследуем экспериментальную оценку дисперсии ошибки оценивания, её связь с границей Рао-Крамера при разных отношениях сигнал/шум, а также смещенность оценки.

Обозначим, как и в параграфе 2.5:  $F = \frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda}$ ,  $\hat{F} = \frac{\pi l \cos(\hat{\theta})}{\lambda}$ .

Методика проведения испытаний аналогична приведенной в параграфе 2.5.

Исследования проводим для двух вариантов исключения неоднозначностей:

1. при исключении только основной неоднозначности;
2. при полном исключении неоднозначности.

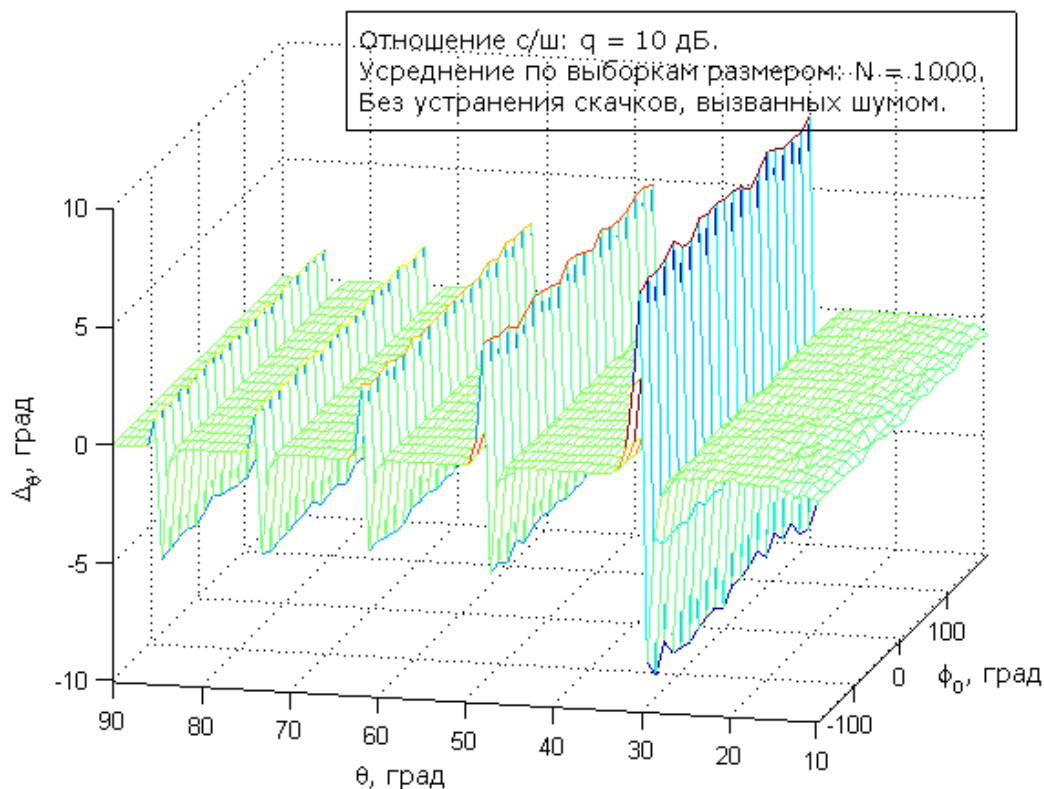
### 4.9.1 Моделирование при исключении только основной неоднозначности

Поверхность смещения при устранении основной неоднозначности приведена на рис. 4.5. Получен результат, аналогичный результату алгоритма (3.14), см рис. 3.2.

Поверхность среднего квадрата ошибки оценки при устранении основной неоднозначности приведена на рис. 4.6.

Получим характеристики при усреднении по базовой фазе.

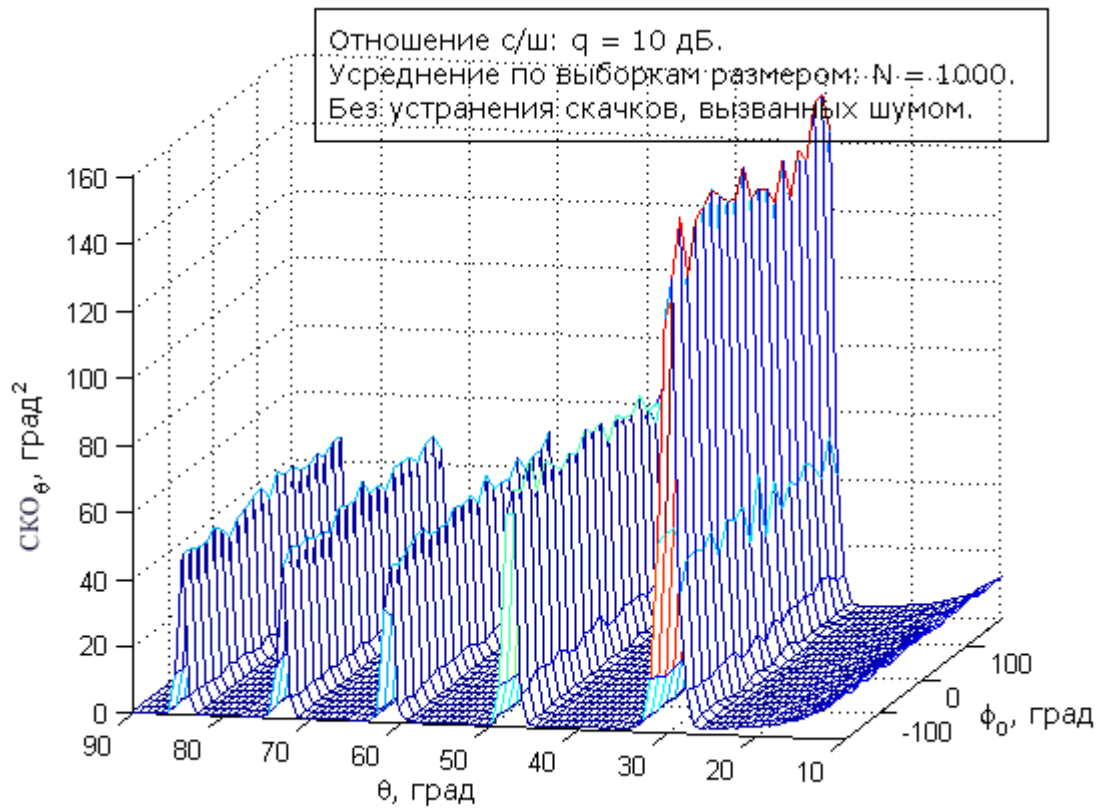
На рис. 4.7, 4.8 представлена зависимость оценки  $\hat{F}$  от истинного значения  $F$  при усреднении по  $\varphi_0$ . При малом отношении сигнал/шум прослежива-



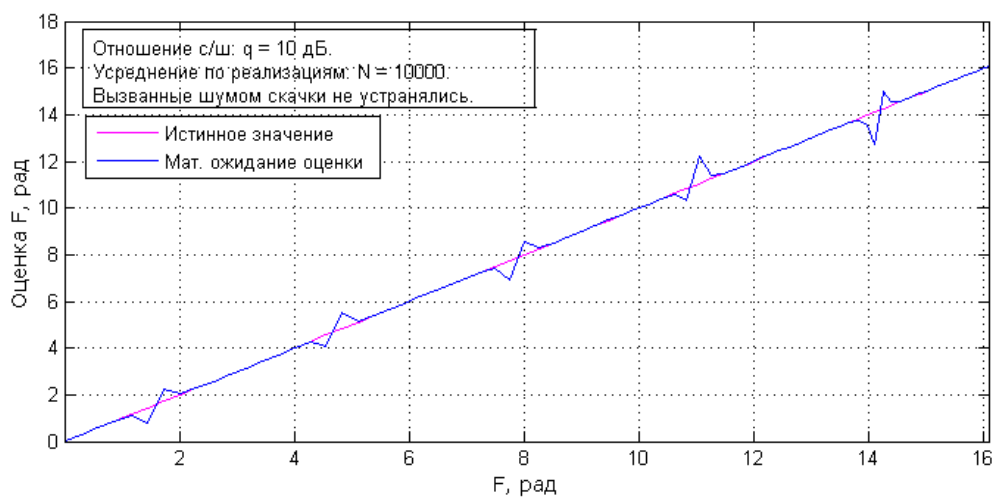
**Рис. 4.5.** Поверхность смещения оценки угла при устранении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

ется влияние шумовой неоднозначности – периодически возникают смещения оценки. С увеличением отношения сигнал/шум вклад шумовой неоднозначности уменьшается, сектора углов её проявления уменьшаются.

На рисунках 4.9, 4.10 представлены оценки среднего квадрата ошибки  $\hat{\theta}$  при различных отношениях сигнал/шум. На графике при определенных углах прихода и малом отношении сигнал/шум присутствуют аномалии – всплески. Они вызваны возникновением неустраненной шумовой неоднозначности. На рис. 4.11 представлена зависимость среднего квадрата ошибки как функции истинного значения  $F$ , из которой можно получить аргументы аномалий:  $F = \frac{\pi}{2} + \pi\xi$ ,  $\xi \in \mathbb{Z}$ . Если исключить из рассмотрение аномальные участки, то можно утверждать, что с увеличением отношения сигнал/шум средний квадрат ошибки оценки стремится к потенциальной дисперсии.



**Рис. 4.6.** Поверхность выборочного среднего квадрата ошибки оценки угла при устранении только основной неоднозначности. Результат моделирования.



**Рис. 4.7.** Оценка  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

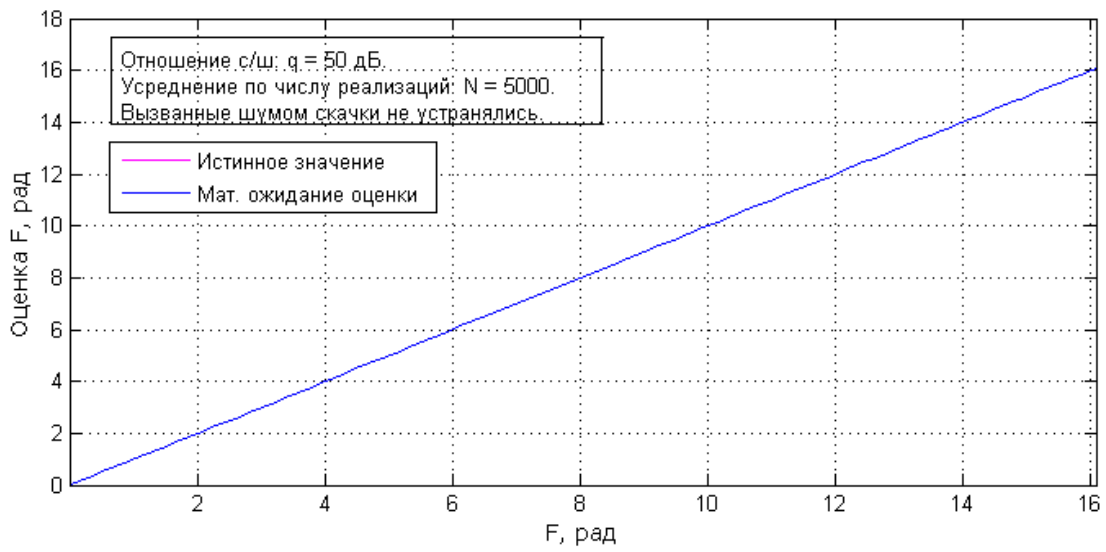


Рис. 4.8. Оценка  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

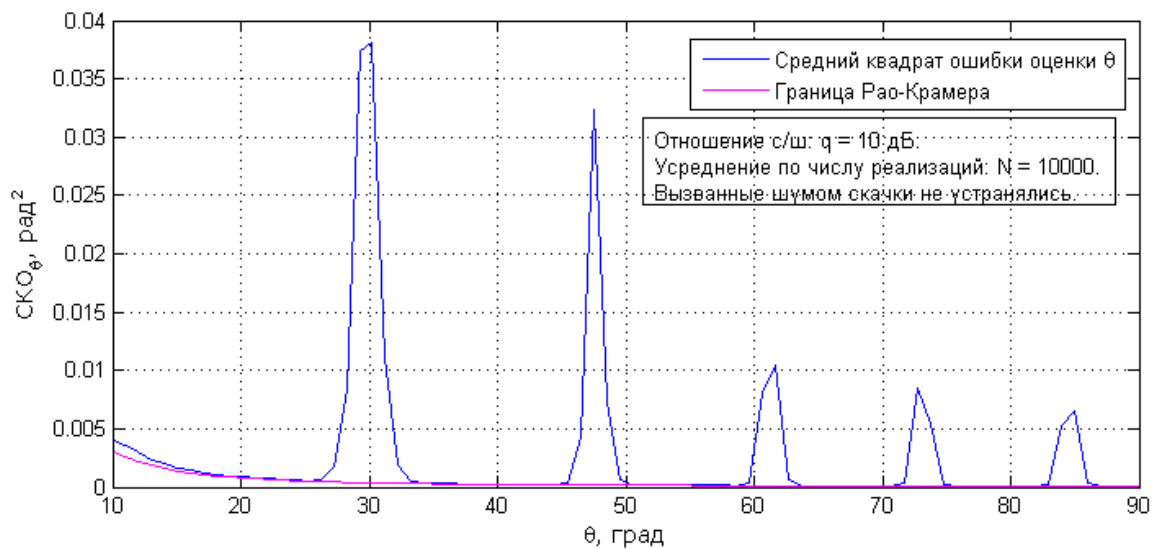


Рис. 4.9. Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

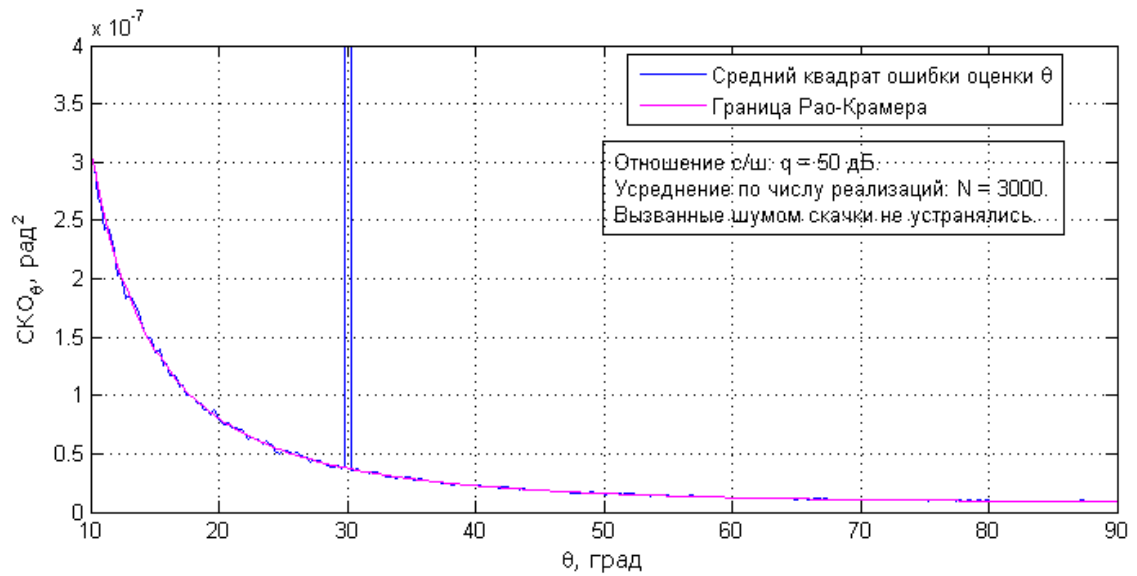


Рис. 4.10. Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.

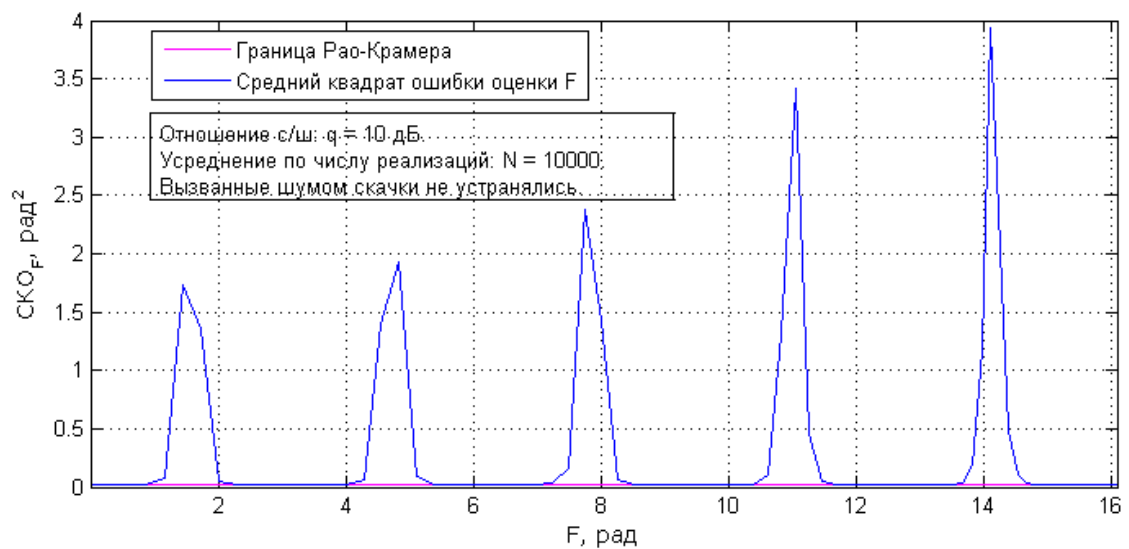
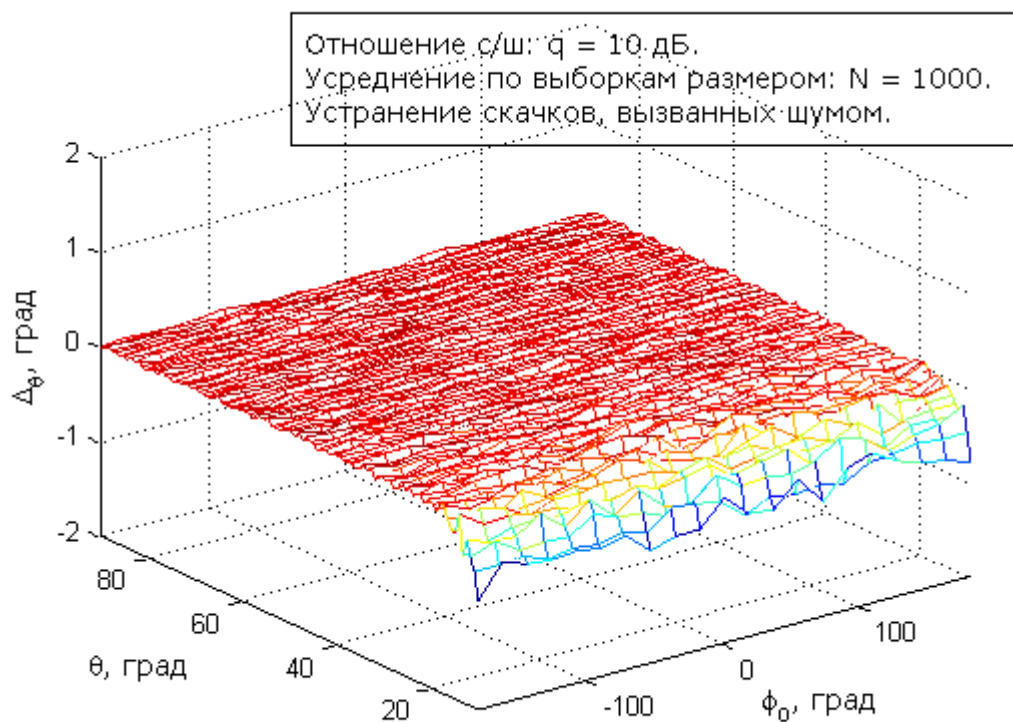


Рис. 4.11. Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и исключении только основной неоднозначности. Результат моделирования.



#### 4.9.2 Моделирование при полном исключении неоднозначности



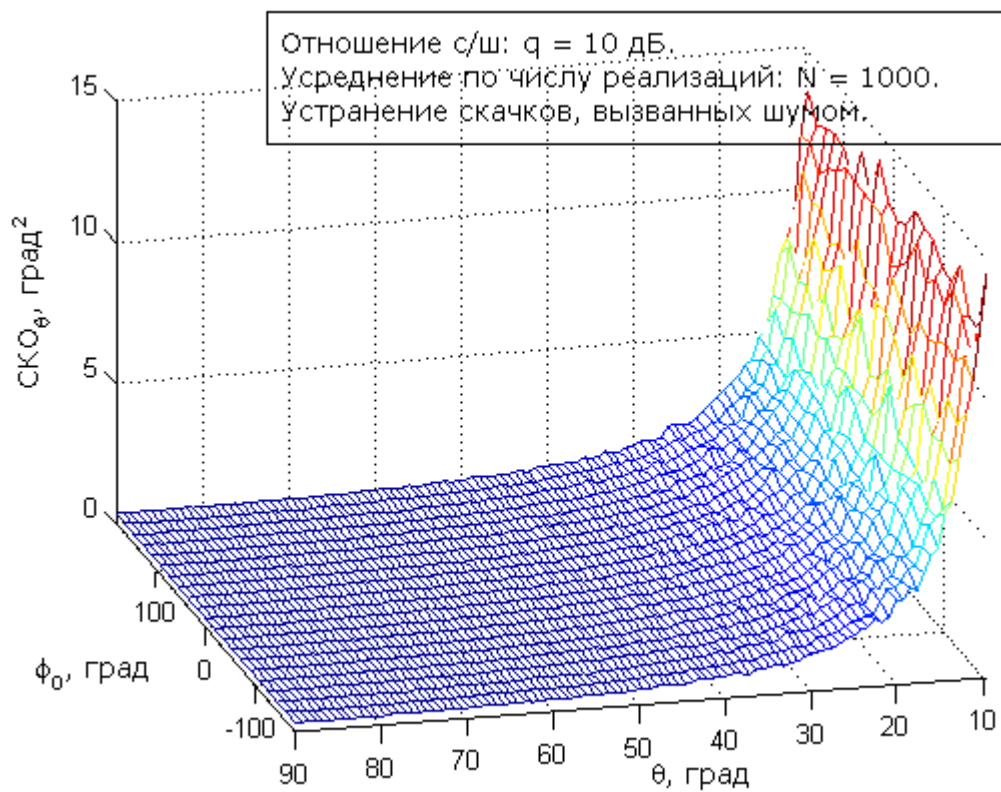
**Рис. 4.12.** Поверхность смещения оценки угла при полном устранении неоднозначности. Результат моделирования.

Поверхность смещения при полном устранении неоднозначности приведена на рис. 4.12. Как видим, формируемая в этом случае оценка несмещенная, быть может за исключением областей малых углов, которые следует изучить подробнее (увеличить мощность статистики).

Поверхность среднего квадрата ошибки оценки при полном устранении неоднозначности приведена на рис. 4.13. Он не зависит от базовой фазы, при пологих углах приема имеется повышение.

Зависимости как у смещения, так и у среднего квадрата ошибки оценки от базовой фазы не выявлено, найдем усредненный по фазе срез этих поверхностей.

На рисунках 4.14, 4.15 представлены оценки среднего квадрата ошибки  $\hat{\theta}$  при различных отношениях сигнал/шум. Исчезли аномалии. С увеличением



**Рис. 4.13.** Выборочный средний квадрат ошибки оценки угла при полном устранении неоднозначности. Результат моделирования.

отношения сигнал/шум средний квадрат ошибки оценки стремится к потенциальной дисперсии.

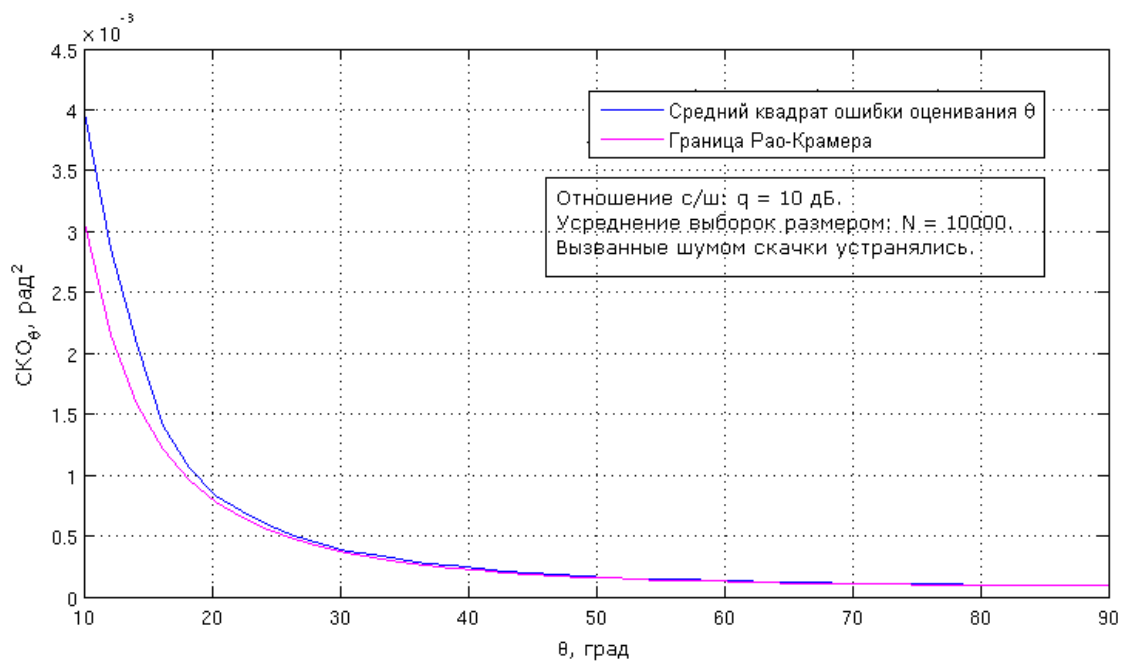


Рис. 4.14. Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и полном устранении неоднозначности. Результат моделирования.

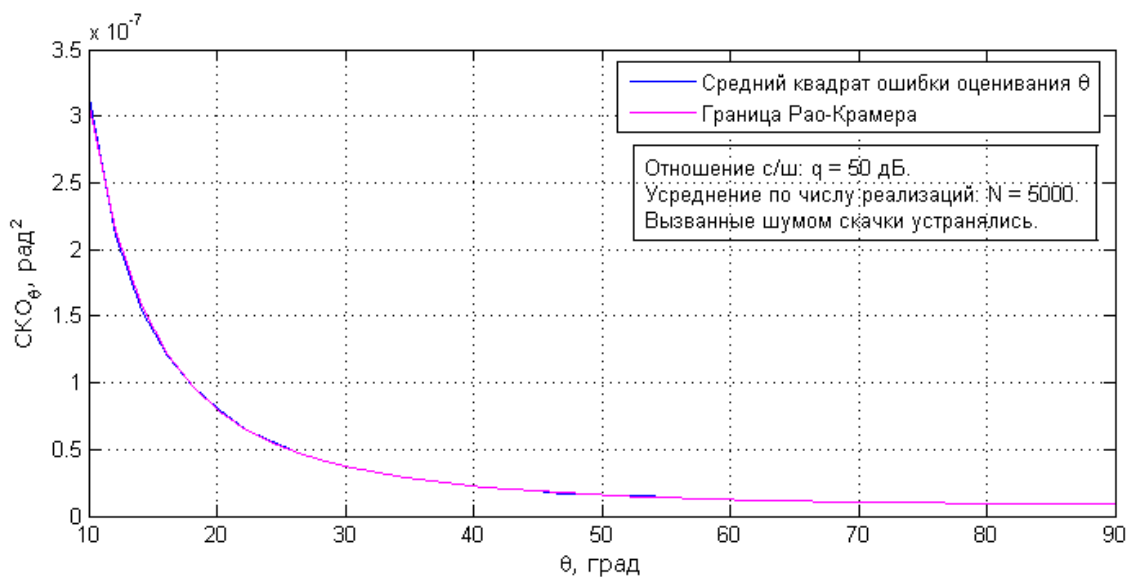
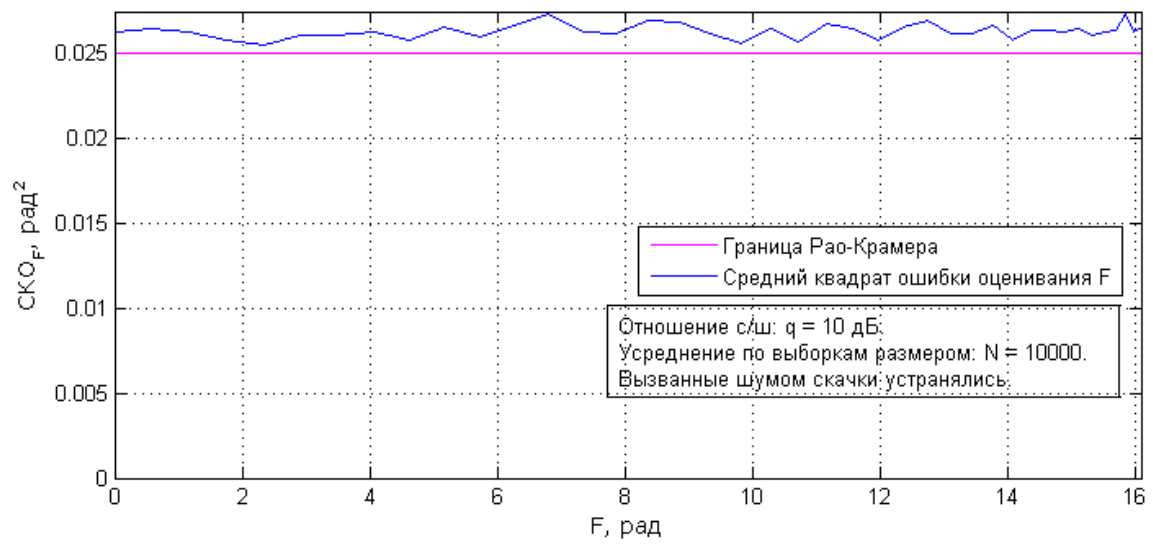


Рис. 4.15. Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{\theta}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и полном устранении неоднозначности. Результат моделирования.



**Рис. 4.16.** Выборочный средний квадрат ошибки  $\hat{F}$  при усреднении по  $\varphi_0$  и полном устранении неоднозначности. Результат моделирования.

## 4.10 Выводы

Потенциальная дисперсия оценок полученного алгоритма совпадает с потенциальными дисперсиями оценок радиоинтерферометрического алгоритма и алгоритма, синтезированного по методу максимального правдоподобия при известной базовой фазе.

Как и в других рассмотренных алгоритмах, в синтезированном в данной главе алгоритме (4.47) невозможно свести к нулю вероятность появления шумовой неоднозначности в измерениях. Шумовая неоднозначность, что отлочно от её проявления в радиоинтерферометрическом алгоритме, возникает при  $\frac{\pi l \cos(\theta)}{\lambda} \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi\xi$ ,  $\xi \in \mathbb{Z}$ , ввиду перемены знака функции  $tg(\hat{F})$  (косвенно вычисляемой в алгоритме) под действием шума. Чем меньше отношение сигнал/шум, тем сильнее выражено её проявление – большой угловой диапазон занимает каждая аномалия. Аналогичная картина наблюдалась для алгоритма оценки максимального правдоподобия при известной базовой фазе.

При полном исключении неоднозначности точность оценок близка к потенциальной и стремится к ней при увеличении отношения сигнал/шум.

Алгоритм обладает аналогичными алгоритму (3.14) точностными характеристиками и аномальными проявлениями, но не требует при этом знание базовой фазы. Минусом алгоритма является большее, по сравнению с алгоритмом (3.14), потребление вычислительных ресурсов.

Независимость алгоритма от базовой фазы дает возможность использования его в качестве дискриминационного.

## Заключение

Рассмотрена задача оценивания угла прихода сигнала при его приеме в двух разнесенных в пространстве точках. Был проведен анализ работы радиоинтерферометрического метода, синтезированы и исследованы алгоритмы оценок максимального правдоподобия при известной и неизвестной начальной фазе сигнала в центральной точке отезка, образованного приемными точками (базовой фазе).

Радиоинтерферометрический метод представлен алгоритмом (2.16), его синтезу и исследованию посвящена глава 2.

Синтезу и исследованию оценки максимального правдоподобия при известной базовой фазе посвящена глава 3. Основным результатом является алгоритм (3.14). Также предложен алгоритм (3.36), не требующий знание базовой фазы. Алгоритм совпадает с алгоритмом (3.14) при эквивалентном отношении сигнал/шум, пропорциональном косинусу базовой фазы.

В главе 4 синтезирован и исследован алгоритм (4.47), соответствующий оценке максимального правдоподобия при случайной, равномерно распределенной базовой фазе.

Потенциальные точности радиоинтерферометрического алгоритма и алгоритмов оценок максимального правдоподобия совпадают. Моделирование показало, что при увеличении отношения сигнал/шум и полном устранении возникающих неоднозначностей средние квадраты ошибок оценивания по каждому алгоритму стремятся к потенциальным границам.

Потенциальная точность оценок зависит не только от отношения  $s/\sigma$  в принимаемых реализациях, но и от истинного значения угла прихода сигнала и расстояния между точками приема. При отклонении направления от нормали к антенне происходит увеличение дисперсии ошибки. Данное явление можно трактовать как уменьшение эффективного расстояния между точками приема.

При одинаковом уровне потенциальной точности алгоритмы отличаются количеством требуемых для устранения неоднозначности данных и уровнем

вычислительных затрат. Алгоритмы (3.36), (4.47) выделяются возможностью использования в качестве дискриминационных без использования дополнительной информации. При этом алгоритм (4.47) обладает характеристиками, стремящимися к потенциальным при увеличении отношения сигнал/шум.

Соотношение вычислительных затрат зависит от специфики используемого вычислительного устройства, но в общем случае оценка максимального правдоподобия при неизвестной базовой фазе потребует больше ресурсов, чем оценка максимального правдоподобия при известной базовой фазе.

Все алгоритмы требуют устранения неоднозначности оценок некоторым устройством извне. Результатом работы каждого алгоритма является ряд решений, из которых требуется выбрать одно. При этом все алгоритмы обеспечивают одинаковый шаг неоднозначности, что важно в случае задачи уточнения ранее полученных сторонним методом оценок.

В работе выделены три типа неоднозначностей по причинам их возникновения. Основная неоднозначность вызывается периодичностью сигнала. В дополнительных неоднозначностях выделены базовая и шумовая.

Базовая неоднозначность свойственна только радиоинтерферометрическому алгоритму. Она обусловлена зависимостью устранения неоднозначности измерения фаз в приемных точках от значения базовой фазы. Для устранения базовой неоднозначности требуется знание базовой фазы.

Шумовая неоднозначность проявляется в появлении под действием шума дополнительного слагаемого кратного  $2\pi$  в косвенно оцениваемом фазовом набеге между точками приема. При определенных углах прихода сигнала свойственна всем трем алгоритмам.

Каждому алгоритму соответствует свой набор неоднозначностей, требующий для устранения свой набор данных. Ввиду эквивалентности точностных характеристик каждого алгоритма основной задачей разработчика представляется полное устранение возникающих неоднозначностей. Для радиоинтерферометрического алгоритма неоднозначность включает все три составляющие. Для оценок максимального правдоподобия: основную и шумовую составляющие, но

при этом шумовая составляющая проявляется сильнее, чем в оценках радиointерферометрического алгоритма.

Приоритет конкретного алгоритма из представленных зависит от дополнительной информации, доступной устройству, а так же от специфики вычислителя. Все полученные алгоритмы могут применяться на практике.

Радиointерферометрический метод можно порекомендовать, если в устройстве необходимо производить измерение фаз сигналов в приемных точках для внешних целей. При этом должна быть возможность либо зафиксировать базовую фазу в серии экспериментов, либо получить её оценку, либо иметь предварительную оценку угла с погрешностью меньше шага неоднозначности.

Специфика алгоритмов (3.14) и (3.36) может быть использована при организации корреляторов: возможно значительное окращение их числа. Алгоритм (3.36) можно использовать в качестве дискриминационного, но при этом точность будет снижена относительно потенциальной.

Алгоритм (4.47) позволяет формировать оценки при неизвестной базовой фазе. Алгоритм хорошо подходит для работы в качестве дискриминационного: его характеристики близки к потенциальным, аппертура и точность не зависят от базовой фазы.

Таким образом, найден ряд решений задачи оценивания угла прихода сигнала при приеме в двух точках при различных исходных данных. Выбор конкретного алгоритма должен осуществляться эвристически на основании дополнительных данных с учетом результатов проведенного исследования.



## Список литературы

1. *Перов А.И.* Статистическая теория радиотехнических систем. – М.: Радиотехника, 2003, 400 с., ил.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования/ Под ред. *А.И. Перова, В.Н. Харисова.* – М.: Радиотехника, 2005, 688 с., ил.
3. Википедия: Свободная Энциклопедия. <http://www.ru.wikipedia.org>
4. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М., Издательство «МИР», 1975.
5. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. – М.: Издательство «Наука», 1968
6. *G. Korn, T. Korn* Mathematical handbook for scientists and engineers. – NY, SF, Toronto, London, Sydney: McGraw-Hill Book Company, 1968.
7. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации: Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.: ил.
8. *Barton, David K.* Radar technology encyclopedia / David K. Barton and Sergey A. Leonov, editors
9. *Романов А.М.* Занимательные вопросы по астрономии и не только. – М.: МЦНМО, 2005. – 415 с.: ил.
10. *С.П. Панько, В.В. Сухотин* Фазовая пеленгация в спутниковой связи. Электронный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ»; <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/035.pdf>
11. *Мальшикин Е. А.* Пассивная радиолокация, М., 1961
12. *Linus Torvalds; David Diamond* Just for fun : the story of an accidental revolutionary. – New York, NY: HarperBusiness, 2001. – 262 с.

Приложение 1. Листинг программы (MatLAB) исследования характеристик в срезе и усреднении по базовой фазе







Приложение 2. Листинг программы  
(MatLAB) исследования поверхностей смеще-  
ния и СКО









## Приложение 3. Задание на выпускную работу