

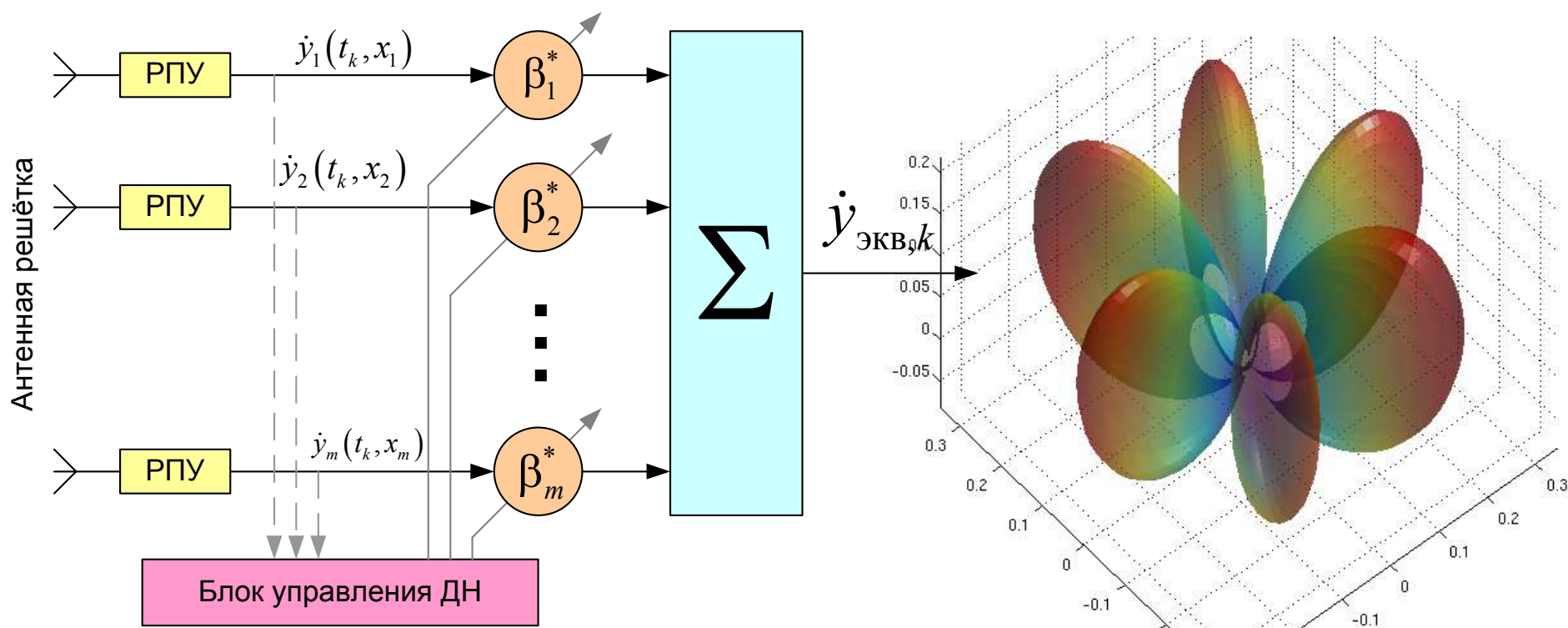
Лекция 16.

Характеристики алгоритмов пространственной обработки сигналов

- Характеристика направленности, диаграмма направленности.
- Коэффициент эффективности.
- Время адаптации.

Характеристика направленности

Взвешенное суммирование сигналов от разных антенн является по сути формированием диаграммы направленности (ДН) антенной решётки.



Если взвешенное суммирование осуществляется в цифровом виде, то ДН является, по сути, «виртуальной». Вектор входных сигналов можно распараллелить и сформировать бесконечное множество таких «виртуальных» ДН.

Характеристика направленности

Определение

Характеристикой направленности в теории пространственно-временной обработки сигналов называют зависимость комплексной амплитуды $\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_\Pi)$ на выходе системы пространственной обработки от направления прихода α_{c0} пробного сигнала (гармонической плоской волны) при заданных направлениях прихода полезного α_c и мешающих \mathbf{a}_Π (если они есть) сигналов.

Функция $U_H(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_\Pi) = |\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_\Pi)|^2$ называется *диаграммой направленности*.

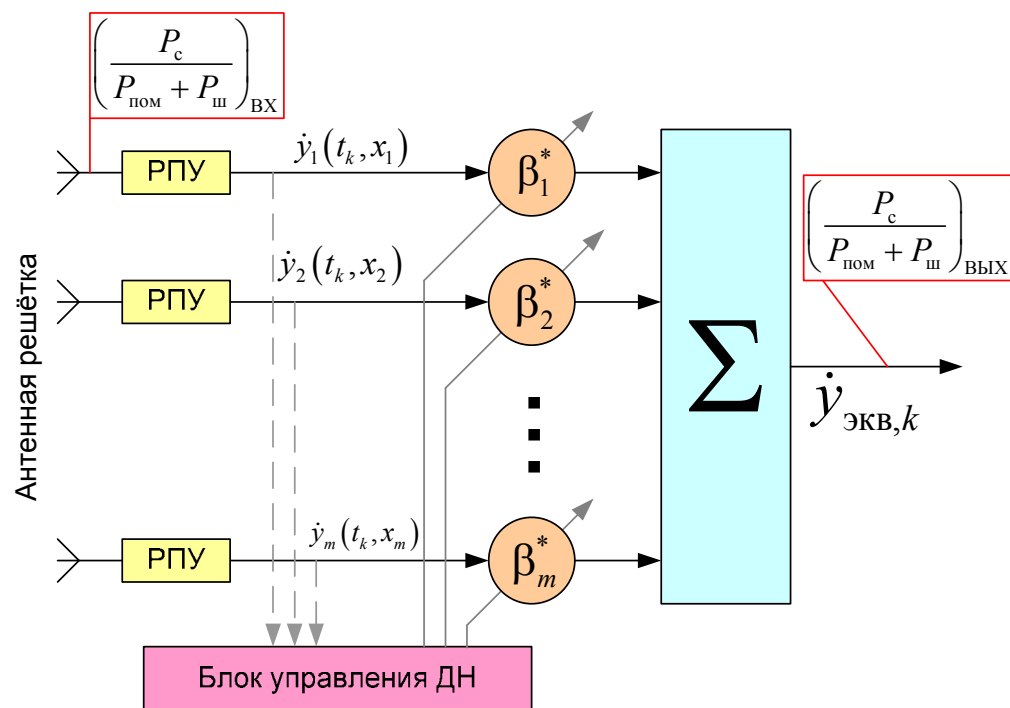
Расчёт характеристики направленности:

$$\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_\Pi) = \dot{\boldsymbol{\beta}}^{*T}(\alpha_c, \mathbf{a}_\Pi) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_{c0}) \cdot \dot{F}(\alpha_{c0})$$

$\dot{F}(\alpha_{c0})$ – характеристика направленности одного антенного элемента

Коэффициент эффективности

Определение. Коэффициент эффективности показывает во сколько раз увеличивается отношение сигнал/(помеха + шум) (ОСПШ) на выходе блока пространственной обработки сигналов по сравнению с ОСПШ на его входе.



$$K_{\text{эф}} = \frac{\left(\frac{P_c}{P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}}}\right)_{\text{ВЫХ}}}{\left(\frac{P_c}{P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}}}\right)_{\text{ВХ}}}$$

Коэффициент эффективности

Найдём ОСПШ на выходе блока пространственной обработки сигналов. Для этого рассмотрим эквивалентные наблюдения.

$$\dot{y}_{\text{ЭКВ},k} = \dot{\mathbf{\beta}}^{*\text{T}}(\alpha_c, \alpha_{\Pi}) \dot{y}_k = \dot{S}_{\text{H}}(t_k, \lambda_k) + \dot{n}_{\text{ЭКВ},k}$$

$$P_{\text{с,ВЫХ}} = M \left[\left| \dot{S}_{\text{H}}(t_k, \lambda_k) \right|^2 \right] = 1$$

$$(P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}})_{\text{ВЫХ}} = M \left[\left| \dot{n}_{\text{ЭКВ},k} \right|^2 \right] = D_{N_{\text{ЭКВ}}}(\alpha_c, \alpha_{\Pi}) = \left(\dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_{\Pi}) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) \right)^{-1}$$

Отсюда

$$\left(\frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ПОМ}} + P_{\text{Ш}}} \right)_{\text{ВЫХ}} = \frac{1}{D_{N_{\text{ЭКВ}}}(\alpha_c, \alpha_{\Pi})} = \left(\dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_{\Pi}) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) \right),$$

$$\text{где } \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}(\alpha_{\Pi}) = \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\Pi}) \dot{\mathbf{V}}_{\Pi} \dot{\mathbf{C}}^{*\text{T}}(\alpha_{\Pi}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

Коэффициент эффективности

Найдём ОСПШ на входе блока пространственной обработки сигналов:

$$P_{c,ВХ} = P_c - \text{задано}; \quad (P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}})_{ВХ} = P_{\text{пом,ВХ}} + \sigma_n^2$$

$P_{\text{пом,ВХ}}$ – суммарная мощность помех на выходе одного антенного элемента. Если помехи некоррелированы, то $P_{\text{пом,ВХ}}$ – одинакова для всех АЭ и равна любому диагональному элементу матрицы $\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}_{\Pi}) \dot{\mathbf{V}}_{\Pi} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\mathbf{a}_{\Pi})$. Поэтому можно считать, что $(P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}})_{ВХ} = D_{n\Sigma,(1,1)}$ - 1-й диагональный элемент матрицы $\dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}$

Отсюда
$$K_{\text{эф}}(\alpha_c, \mathbf{a}_{\Pi}) = \frac{(P_c / (P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}}))_{\text{ВЫХ}}}{(P_c / (P_{\text{пом}} + P_{\text{ш}}))_{\text{ВХ}}} = \frac{\dot{\mathbf{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{\mathbf{D}}_{n\Sigma}^{-1}(\mathbf{a}_{\Pi}) \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c)}{P_c / D_{n\Sigma,(1,1)}}$$

Коэффициент эффективности

Вспомним, что $\dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = \sqrt{P_c} \left| e^{j\phi_1(\alpha_c)} \ e^{j\phi_2(\alpha_c)} \ \dots \ e^{j\phi_m(\alpha_c)} \right|^T = \sqrt{P_c} \cdot \check{\mathbf{H}}(\alpha_c),$

где $\check{\mathbf{H}}(\alpha_c) = \left| e^{j\phi_1(\alpha_c)} \ e^{j\phi_2(\alpha_c)} \ \dots \ e^{j\phi_m(\alpha_c)} \right|^T$

Определим суммарную мощность помех как $V_{\Pi,\Sigma} = \text{tr}(\mathbf{V}_{\Pi})$ (полагаем помехи некоррелированными,

на практике это так). Определим отношение помеха/шум как $q_{\Pi/\text{ш}} = \frac{V_{\Pi,\Sigma}}{\sigma_n^2}$, тогда $\mathbf{D}_{n\Sigma}(\mathbf{a}_{\Pi}) =$

$$= \sigma_n^2 \left(\frac{V_{\Pi,\Sigma}}{\sigma_n^2} \frac{1}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}_{\Pi}) \mathbf{V}_{\Pi} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\mathbf{a}_{\Pi}) + \mathbf{I} \right) = \sigma_n^2 \left(q_{\Pi/\text{ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}_{\Pi}) \frac{\mathbf{V}_{\Pi}}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\mathbf{a}_{\Pi}) + \mathbf{I} \right), \quad D_{n\Sigma,(1,1)} = V_{\Pi,\Sigma} + \sigma_n^2 = \sigma_n^2 (1 + q_{\Pi/\text{ш}})$$

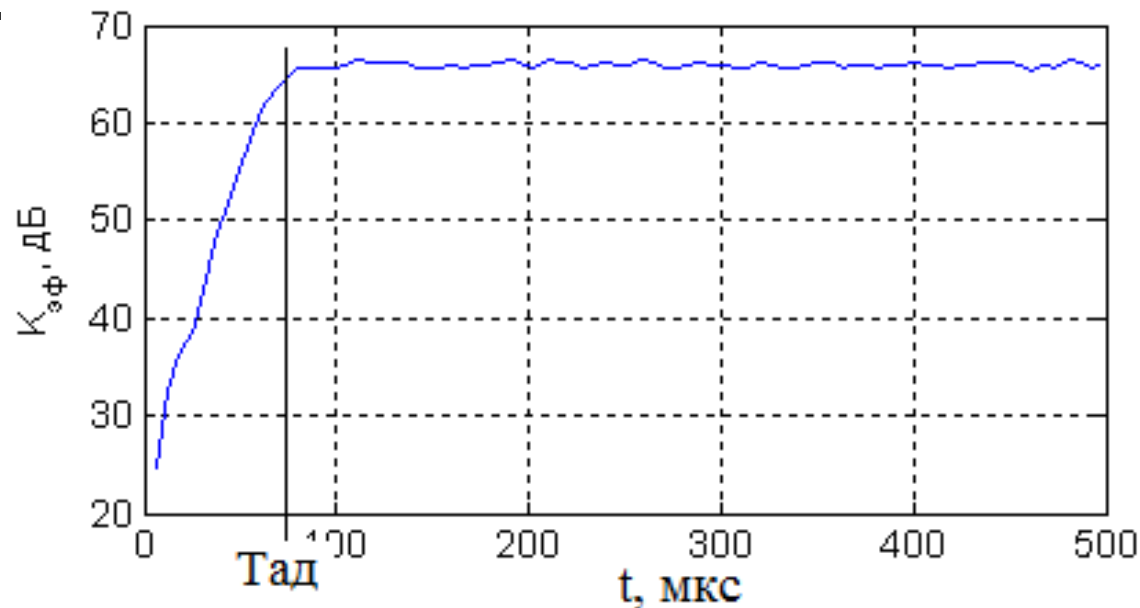
Тогда в выражении для k -та эффективности мощность сигнала и дисперсия шума сокращаются:

$$K_{\text{эф}}(\alpha_c, \mathbf{a}_{\Pi}) = (1 + q_{\Pi/\text{ш}}) \cdot \check{\mathbf{H}}^{*T}(\alpha_c) \left(q_{\Pi/\text{ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{a}_{\Pi}) \frac{\mathbf{V}_{\Pi}}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}^{*T}(\mathbf{a}_{\Pi}) + \mathbf{I} \right)^{-1} \check{\mathbf{H}}(\alpha_c)$$

Вывод: Кэф зависит только от отношения помеха/шум, от пространственных направлений на источники помех и сигнала и от распределения относительных мощностей помех

Время адаптации

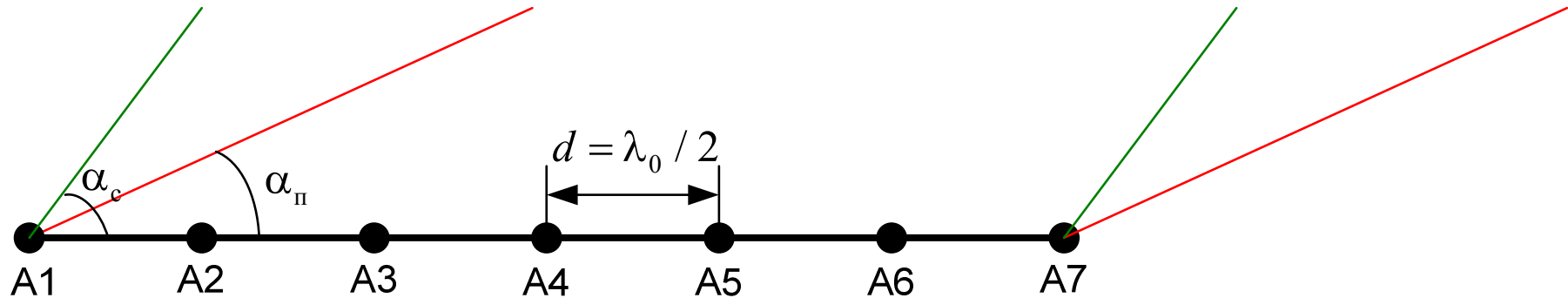
На практике направления прихода полезного сигнала α_c и/или помех α_{Π} как правило неизвестны. Необходимо строить адаптивную систему, явно или неявно оценивающую эти направления. В процессе такого оценивания $K_{эф}$ повышается до установившегося значения.



Под временем адаптации понимают время, за которое $K_{эф}$ достигает установившегося значения.

Пример

7-элементная линейная антенная решётка из ненаправленных элементов. Действует 1 помеха.



$$\alpha_n = 30^\circ, \alpha_c = 60^\circ, \dot{F}(\alpha) = 1, m = 7, p = 1, q_{\text{п/ш}} = 10, d = \lambda_0 / 2$$

1. Найдём матрицы $\dot{\mathbf{H}}(\alpha_c)$ и $\dot{\mathbf{C}}(\alpha_n)$:

$$\dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = \left| e^{j\phi_1(\alpha_c)} \quad e^{j\phi_2(\alpha_c)} \quad \dots \quad e^{j\phi_7(\alpha_c)} \right|^T, \quad \phi_i(\alpha_c) = \frac{2\pi d(i-1)\cos(\alpha_c)}{\lambda_0} = \pi(i-1)\cos(60^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = \left| 1 \quad e^{j\pi/2} \quad e^{j\pi} \quad e^{j3\pi/2} \quad e^{j2\pi} \quad e^{j5\pi/2} \quad e^{j3\pi} \right|^T;$$

$$\dot{\mathbf{C}}(\alpha_n) = \left| e^{j\phi_{\text{п}1}(\alpha_n)} \quad e^{j\phi_{\text{п}2}(\alpha_n)} \quad \dots \quad e^{j\phi_{\text{п}7}(\alpha_n)} \right|^T, \quad \phi_{\text{п}i}(\alpha_n) = \frac{2\pi d(i-1)\cos(\alpha_n)}{\lambda_0} = \pi(i-1)\cos(30^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{C}}(\alpha_n) = \left| 1 \quad e^{j\pi\sqrt{3}/2} \quad e^{j\pi\sqrt{3}} \quad e^{j3\pi\sqrt{3}/2} \quad e^{j2\pi\sqrt{3}} \quad e^{j5\pi\sqrt{3}/2} \quad e^{j3\pi\sqrt{3}} \right|^T$$

Пример

2. Найдём характеристику направленности

$$\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \alpha_\Pi) = \dot{\beta}^{*T}(\alpha_c, \alpha_\Pi) \dot{H}(\alpha_{c0}) \cdot \dot{F}(\alpha_{c0})$$

$$\dot{F}(\alpha_{c0}) = 1; \quad \dot{H}(\alpha_{c0}) = \sqrt{P_c} \cdot \dot{\tilde{H}}(\alpha_{c0}); \quad \beta(\alpha_c, \alpha_\Pi) = \frac{\dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{H}(\alpha_c)}{\dot{H}^{*T}(\alpha_c) \dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{H}(\alpha_c)}$$

$$\dot{\tilde{H}}(\alpha_{c0}) = \left| e^{j\phi_1(\alpha_{c0})} \quad e^{j\phi_2(\alpha_{c0})} \quad \dots \quad e^{j\phi_7(\alpha_{c0})} \right|^T, \quad \phi_i(\alpha_c) = \frac{2\pi d(i-1)\cos(\alpha_{c0})}{\lambda_0} = \pi(i-1)\cos(\alpha_{c0})$$

$$\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \alpha_\Pi) = \frac{\dot{H}^{*T}(\alpha_c) \dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi)}{\dot{H}^{*T}(\alpha_c) \dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{H}(\alpha_c)} \dot{H}(\alpha_{c0}) =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{P_c}} \dot{\tilde{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \cdot \dot{\tilde{H}}(\alpha_{c0}) \cancel{\sqrt{P_c}}}{\cancel{\sqrt{P_c}} \dot{\tilde{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{\tilde{H}}(\alpha_c) \cancel{\sqrt{P_c}}} = \frac{\dot{\tilde{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \cdot \dot{\tilde{H}}(\alpha_{c0})}{\dot{\tilde{H}}^{*T}(\alpha_c) \dot{D}_{n\Sigma}^{-1}(\alpha_\Pi) \dot{\tilde{H}}(\alpha_c)};$$

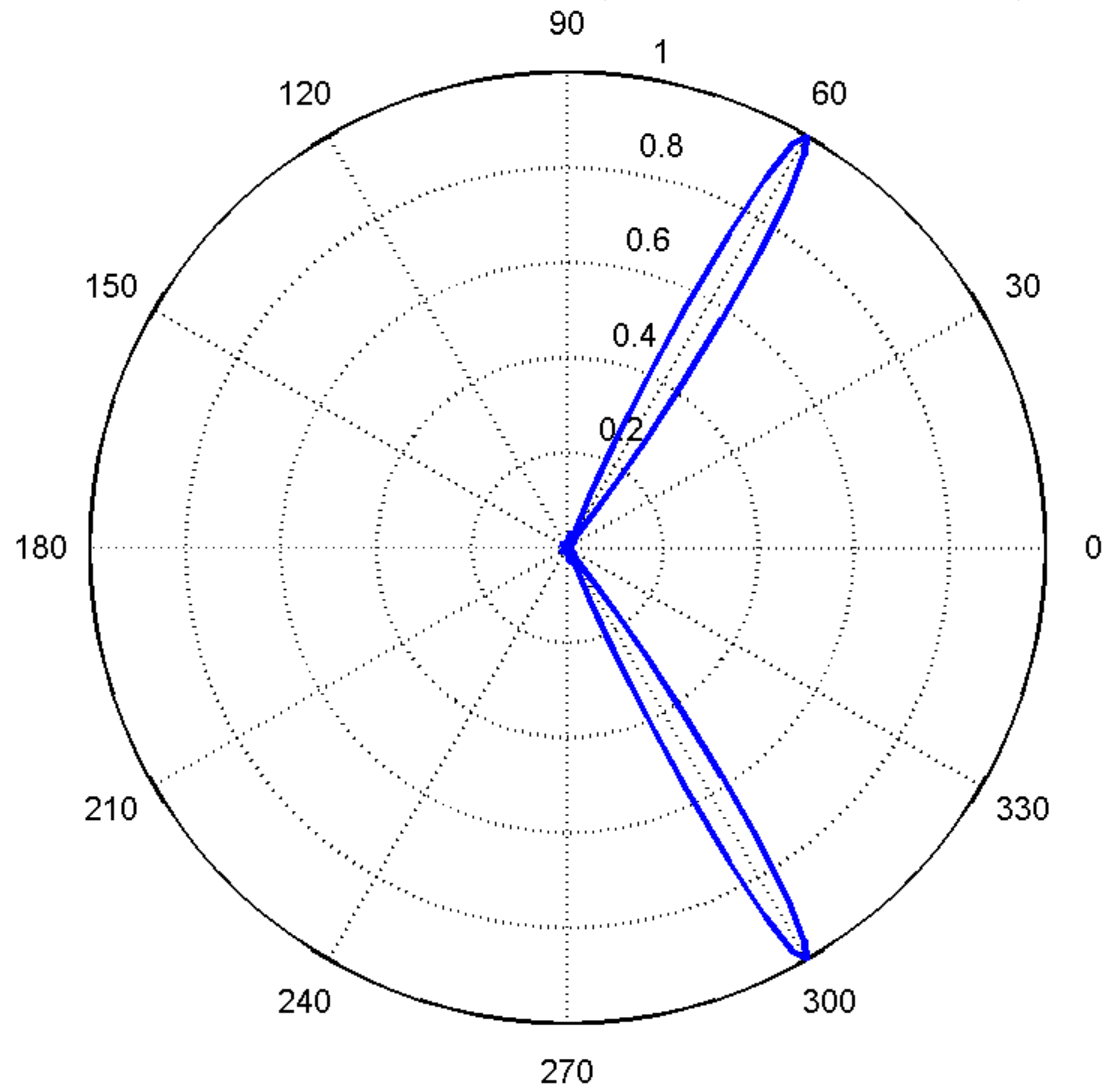
$$\dot{D}_{n\Sigma}(\alpha_\Pi) = \sigma_n^2 \left(q_{\Pi/\Sigma} \cdot \dot{C}(\alpha_\Pi) \frac{V_\Pi}{V_{\Pi,\Sigma}} \dot{C}^{*T}(\alpha_\Pi) + \mathbf{I} \right), \quad V_\Pi = V_{\Pi,\Sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \alpha_\Pi) = \frac{\dot{\tilde{H}}^{*T}(\alpha_c) \left(q_{\Pi/\Sigma} \cdot \dot{C}(\alpha_\Pi) \dot{C}^{*T}(\alpha_\Pi) + \mathbf{I} \right)^{-1} \cdot \dot{\tilde{H}}(\alpha_{c0})}{\dot{\tilde{H}}^{*T}(\alpha_c) \left(q_{\Pi/\Sigma} \cdot \dot{C}(\alpha_\Pi) \dot{C}^{*T}(\alpha_\Pi) + \mathbf{I} \right)^{-1} \dot{\tilde{H}}(\alpha_c)}$$

Пример

Построим диаграмму направленности, которая

определена как $U_H(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_H) = |\dot{U}_c(\alpha_{c0} | \alpha_c, \mathbf{a}_H)|^2$



Пример

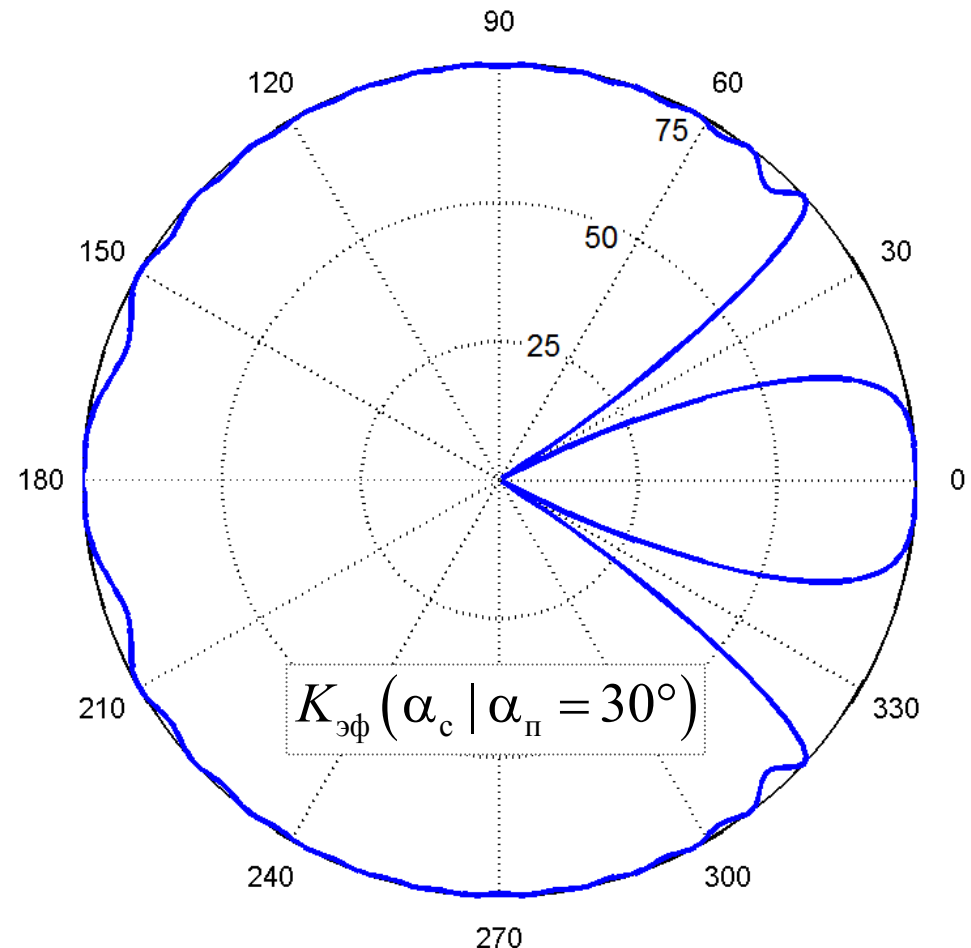
3. Найдём коэффициент эффективности

$$K_{\text{эф}}(\alpha_c, \alpha_{\text{п}}) = (1 + q_{\text{п/ш}}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \left(q_{\text{п/ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\text{п}}) \frac{\mathbf{V}_{\text{п}}}{V_{\text{п},\Sigma}} \dot{\mathbf{C}}^{*\text{T}}(\alpha_{\text{п}}) + \mathbf{I} \right)^{-1} \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c), \quad \mathbf{V}_{\text{п}} = V_{\text{п},\Sigma} \Rightarrow$$

$$K_{\text{эф}} = (1 + q_{\text{п/ш}}) \cdot \dot{\mathbf{H}}^{*\text{T}}(\alpha_c) \left(q_{\text{п/ш}} \cdot \dot{\mathbf{C}}(\alpha_{\text{п}}) \dot{\mathbf{C}}^{*\text{T}}(\alpha_{\text{п}}) + \mathbf{I} \right)^{-1} \dot{\mathbf{H}}(\alpha_c) = 73,9 \quad (\text{раза})$$

$$K_{\text{эф}}[\text{дБ}] = 10 \lg(K_{\text{эф}}) = 18,7 \text{ дБ}$$

Зависимость
коэффициента
эффективности от
направления на
источник сигнала (α_c)
при фиксированном
направлении на
источник помехи $\alpha_{\text{п}} = 30^\circ$



**Спасибо за внимание и успешной
подготовки к экзамену!**

